HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
Avdeling for teknologi

Målform:	Bokmål					
Eksamensdato:	5 juni 2015					
Varighet/eksamenstid:	3 timer					
Emnekode:	TALM1005					
Emnenavn:	Statistikk og Økonomi (statistikkdelen)					
Klasse(r):	Logistikk 1	Kjemi 2	Material 2	Bygg 2, Maskin 2	Elektro 2	Fornybar energi 2
Studiepoeng:	10 studiepoeng					
Faglærer(e): (navn og telefonnr på eksamensdagen)	Kjetil L. Nielsen (970 85 486), Lars Engvik, Eirik Spets, Ketil Arnesen					
Kontaktperson(adm.) (fylles ut ved behov – kun ved kursemner)						
Hjelpemidler:	Kalkulator type B, formelark med tabeller.					
Oppgavesettet består av: (antall oppgaver og antall sider inkl. forside)	6 oppgaver (10 deloppgaver), 4 sider (inkl. denne forsiden)					
Vedlegg består av: (antall sider)	Formelark (3 sider) og tabeller (2 sider)					

Merknad:

Oppgaveteksten kan beholdes av studenter som sitter eksamenstiden ut.

NB! Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner arbeidet, og disponer tiden.

Dersom noe virker uklart i oppgavsettet, skal du gjøre dine egne antagelser og forklare dette i besvarelsen.

Lykke til!

Oppgave 1

En datamaskin genererer 7 tilfeldige tall mellom 0 og 1. Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 3 av tallene ligger i intervallet $\frac{1}{2}$ til 1?

Oppgave 2

Anta at vi har to uavhengige, stokastiske variable, $X \sim N(10, 2^2)$ og $Y \sim N(3, 0.1^2)$. La Z være en stokastisk variabel gitt ved $Z = X - 3Y$. Finn $P(Z > 2)$

Oppgave 3

Anta at antall ganger en tilfeldig student dupper av i løpet av en økonomiforelesning, X, er gitt ved fordelingen:

$$P(X = x) = a \left(\frac{1}{2}\right)^x, \ x = 0, 1, 2, 3$$

a) Vis at vi må ha $a = \dfrac{8}{15}$, for at fordelingen skal være en gyldig sannsynlighetsfordeling.

b) Finn forventningen og variansen til X.

c) I en time la foreleseren merke til at en bestemt student duppa av minst èn gang. Finn sannsynligheten for at studenten duppa av nøyaktig tre ganger.

d) I en økonomiforelesning er det 300 studenter til stede. La X_i være antall ganger student nr. i dupper av; $i = 1, 2, 3, ..., 300$. Vi antar at studentene dupper av uavhengige av hverandre og at hver X_i har samme fordeling, som fordelingen gitt ovenfor. Beregn sannsynligheten for at det blir til sammen mellom 200 og 250 "avdupninger" denne forelesningen.

Oppgave 4

En forsker vil publisere to artikler. Fra erfaring anslår forskeren at det er 0.7 sannsynlighet for at den ene artikkelen blir akseptert, mens det er 0.4 sannsynlighet for at den andre blir akseptert. I tillegg anslår forskeren at det er 75% sannsynlighet for at minst èn artikkel blir avvist. Hva er sannsynligheten for at minst èn artikkel blir akseptert?

Oppgave 5

Kalium-argondatering er en vanlig metode for å anslå alderen til mineraler. Metoden går ut på å måle andelen av den radioaktive kaliumisotopen ^{40}K og dens datterprodukter. Prosedyren er derimot ikke uten usikkerhet. Vi foretar 19 målinger på en mineralprøve. Anta at målingene er uavhengige og identisk normalfordelte.

Måling nr.	Alder (millioner av år), y
1	249
2	254
3	243
4	268
5	253
6	269
7	287
8	241
9	273
10	306
11	303
12	280
13	260
14	256
15	278
16	344
17	304
18	283
19	310

Oppgitt:

$$\sum_{i=1}^{19} y_i = 5261 \quad \sum_{i=1}^{19} y_i^2 = 1469945$$

Lag et 95% konfidensintervall for alderen til mineralprøven.

Oppgave 6

Etterhvert som temperaturen øker, løser natriumnitrat ($NaNO_3$) seg bedre opp i vann. Vi gjør 9 målinger av hvor mye natriumnitrat som oppløses i 100g vann ved ulike temperaturer:

Måling nr.	Temperatur (Celsius), x	Gram oppløst, Y
1	0.00	66.7
2	4.00	71.0
3	10.0	76.3
4	15.0	80.6
5	21.0	85.7
6	29.0	92.9
7	36.0	99.4
8	51.0	113.6
9	68.0	125.1

Oppgitt:

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 234 \qquad \sum_{i=1}^{9} Y_i = 811.3$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 10144 \qquad \sum_{i=1}^{9} x_i Y_i = 24628.6$$

a) Anta at Y_i er uavhengige og normalfordelte med forventning $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ og varians $\sigma^2 = 0.01$. Bestem den estimerte regresjonslinjen.

Det blir påstått at mengden natriumnitrat som oppløses i 100g vann, øker med 0.85g per grad Celsius. Våre resultater tyder på at dette tallet er for lite.

b) Sett opp og utfør en hypotesetest med $\alpha = 0.01$ for å avgjøre om vi har grunnlag til å påstå vår hypotese om at tallet 0.85 er for lite.

Formler og tabeller for statistikk

1 Sannsynlighetsregning

Generell addisjonssetning

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Betinget sannsynlighet

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Gen. multiplikasjonsregel

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Total sannsynlighet

$$P(A) = \sum_{i=1}^{r} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Bayes lov

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Hvis A og B uavhengige

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

2 Kombinatorikk

Antall forskjellige utvalg når s enheter trekkes fra en populasjon på N enheter:

Ordnet utvalg med tilbakelegging

$$N^s$$

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

$$(N)_s = N(N-1)...(N-s+1) = \frac{N!}{(N-s)!}$$

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

$$\binom{N}{s} = \frac{(N)_s}{s!} = \frac{N!}{s!(N-s)!}$$

3 Sannsynlighetsfordelinger generelt (1 variabel)

Fordelingsfunksjon

<u>Diskret</u>	<u>Kontinuerlig</u>
$F(x) = P(X \leq x)$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$	$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

Forventing

<u>Diskret</u>

$$\mu = E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

<u>Kontinuerlig</u>

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

Varians

<u>Diskret</u>

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$$
$$= \sum x^2 P(X = x)) - \mu^2$$

<u>Kontinuerlig</u>

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$$

Standardavvik

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

4 Regler for forventing og varians

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$ (når X_1 og X_2 er uavhengige.)

5 Sannsynlighetsfordelinger generelt (2 variable)

Simultanfordeling for X og Y

$P[(X = x) \cap (Y = y)]$

Forventning

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P[(X = x) \cap (Y = y)]$$

Kovarians

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] = E(X \cdot Y) - \mu_1 \cdot \mu_2$

Korrelasjonskoeffisient

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

6 Diskrete sannsynlighetsfordelinger

Binomisk fordeling

$X \sim \mathrm{bin}(n,p)$:

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$

$E(X) = np$

$\mathrm{Var}(X) = np \cdot (1-p)$

Poissonfordeling

$X \sim Po(\lambda) = Po(\alpha \cdot t)$:

$P(X = x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$

$E(X) = \lambda$

$\mathrm{Var}(X) = \lambda$

7 Kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

Normalfordelingen

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = G(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

Standard normalfordeling

$X \sim N(0,1)$:

$F(x) = P(X \leq x) = G(x)$

$G(-x) = 1 - G(x)$

Exponensialfordelingen

$T \sim \exp(\alpha)$:

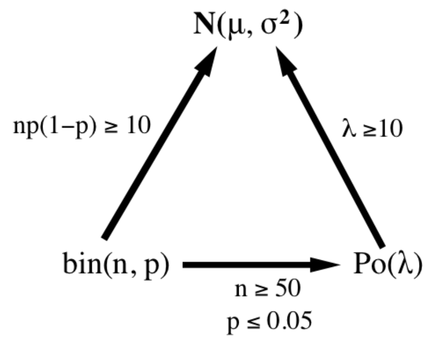
$f(t) = \alpha \cdot e^{-\alpha t}$ for t > 0

$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ for t > 0

$E(T) = \frac{1}{\alpha}$

$\mathrm{Var}(T) = \frac{1}{\alpha^2}$

8 Tilnærminger



Sentralgrensesetningen

Dersom X_1, X_2,...,X_n er uavhengige og identisk fordelte stokastiske variable med forventing μ og varians σ^2, så er for *store* verdier av n (n ≥ 30):

1) $X_1 + X_2 + ... + X_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$

2) $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

9 Punktestimering

Punktestimator for forventing

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\hat{\mu}) = \mu \quad \mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Punktestimator for varians

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right)$$

$E(S^2) = \sigma^2$

10 Hypotesetesting

Signifikanssannsynlighet - "p-verdi"

Sannsynligheten for å få et resultat som er lik eller mer ekstrem enn den observerte verdien, gitt at H_0 er sann.

Styrkefunksjonen

$\beta(\theta) = P(\text{"Påstå H}_1\text{"} | \theta)$

Hypotesetesting med kjent σ

Antar normalfordelte, eller tilnærmet normalfordelte observasjoner:

(1-α)·100 % Konfidensintervall for μ

$$\overline{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Utvalgsstørrelse

$$n = \left(\frac{u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{d}\right)^2, \text{ d = feilmargin.}$$

Testovervator for H$_0$: $\mu = \mu_0$

$$U_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 1\right)$$

Hypotesetesting med ukjent σ

Antar normalfordelte observasjoner:

(1-α)·100 % Konfidensintervall for μ

$$\overline{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Testovervator for H$_0$: $\mu = \mu_0$

$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Når H$_0$ er sann, er T$_0$ t-fordelt med (n-1) frihetsgrader.

Poissonfordelingen (normaltilnærming)

Tilnærmet (1-α)·100 % Konfidensintervall for λ

$$\hat{\lambda} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}}, \text{ der } \hat{\lambda} = X$$

Testovervator for H$_0$: $\lambda = \lambda_0$

$$U_0 = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}$$

Binomisk fordeling (normaltilnærming)

Tilnærmet (1-α)·100 % Konfidensintervall for p

$$\hat{p} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \text{ der } \hat{p} = \frac{X}{n}$$

Testovervator for H$_0$: $p = p_0$

$$U_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

11 Korrelasjon

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - \overline{Y}^2$$

$$S_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Empirisk korrelasjonskoeffisient

$$R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

12 Regresjonsmodellen

Vi antar at vi har n par observasjoner av x og Y: $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), ..., (x_n, Y_n)$, der $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ er uavhengige og normalfordelte stokastiske variable, og der $x_1, x_2, ..., x_n$ er kjente tall..

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad \text{Var}(Y_i) = \sigma^2 \quad i = 1, 2, ..., n$$

Minste kvadraters estimatorer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})Y_i = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\overline{x}\overline{Y}\right),$$

der $M = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} \quad \hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \tfrac{\sigma^2}{M}) \quad \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, \tfrac{\sigma^2}{nM}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

Estimert regresjonslinje

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

(1-α)·100 % Konfidensintervall for β_1 (kjent σ)

$$\hat{\beta}_1 \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{M}}$$

Testovervator for H$_0$: $\beta_1 = \beta_1^0$ (kjent σ)

$$U_0 = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^0}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \sim N\left(\frac{\beta_1 - \beta_1^0}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}}, 1\right)$$

N(0, 1)-FORDELINGEN : $G(x) = P(X \leq x)$

Eksempel: $x = 2.04$ gir $P(X \leq 2.04) = G(2.04) = 0.9793$.

For negative verdier benyttes formelen: $G(-x) = 1 - G(x)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Kvantiltabell:

α	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
u_α	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.878	3.090

KVANTILTABELL FOR t-FORDELINGEN

Tabellen gir $t_{\alpha, m}$ som er α-kvantilen i t-fordelingen med m frihetsgrader.

$$P(T > t_{\alpha, m}) = \alpha \text{ der } T \sim t_m$$

Eksempel: $t_{0.10, 12} = 1.356$. Det betyr at $P(T > 1.356) = 0.10$ når $T \sim t_{12}$.

m \ α	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005
1	1.376	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925
3	0.978	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841
4	0.941	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604
5	0.920	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032
6	0.906	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750
31	0.853	1.309	1.696	2.040	2.144	2.453	2.744
32	0.853	1.309	1.694	2.037	2.141	2.449	2.738
33	0.853	1.308	1.692	2.035	2.138	2.445	2.733
34	0.852	1.307	1.691	2.032	2.136	2.441	2.728
35	0.852	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724
36	0.852	1.306	1.688	2.028	2.131	2.434	2.719
37	0.851	1.305	1.687	2.026	2.129	2.431	2.715
38	0.851	1.304	1.686	2.024	2.127	2.429	2.712
39	0.851	1.304	1.685	2.023	2.125	2.426	2.708
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660
70	0.847	1.294	1.667	1.994	2.093	2.381	2.648
80	0.846	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639
∞	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576