

Løsning eksamen desember 2016

Oppgave 1

a) En drone har to uavhengige motorer. Vi innfører hendelsene

A: motor 1 svikter

B: motor 2 svikter

Dronen er avhengig av at begge virker, slik at sannsynligheten for at dronen skal styrte, tilsvare sannsynligheten for at minst én motor svikter (motor 1 eller 2 eller begge). Denne sannsynligheten er

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\&= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \quad (\text{fordi A og B er uavhengige}) \\&= 0.30 + 0.30 - 0.30^2 \\&= \underline{\underline{0.51}}\end{aligned}$$

b) En drone har 8 uavhengige motorer, og holder seg i lufta så lenge minst 6 av 8 motorer virker. Sannsynligheten for at dronen skal styrte, tilsvare altså at 3 eller flere motorer svikter.

La X angi antallet motorer som svikter. Ettersom motorene er uavhengige med samme sannsynlighet p for svikt, er X binomisk fordelt med $n = 8$ og $p = 0.050$. Vi skal altså bestemme

$$\begin{aligned}P(\text{drone styrter}) &= P(X \geq 3) \\&= 1 - P(X \leq 2)\end{aligned}$$

Her kan vi enten bruke binomisk punktsannsynlighet og bruke at

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0),$$

eller vi kan bruke den kumulative binomiske fordelingen på kalkis/tabell. Bruker det siste, dvs. finner at $P(X \leq 2)$ er gitt ved:

```
Binomial C.D
Data      :Variable
x         :2
Numtrial:8
p         :0.05
Save Res:None
Execute
None 117
```

```
Binomial C.D
p=0.99421178
```

$$P(X \leq 2) = 0.994,$$

som gir at

$$\begin{aligned} P(\text{drone styrter}) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - 0.9942 \\ &= \underline{\underline{0.0058}} \end{aligned}$$

c) Vi skal fordele 5 batterier A, B, C, D og E på 3 droner (drone 1, drone 2, drone 3). Det er naturlig å skille på om batteri A er i drone 1, 2 eller 3, slik at vi skal foreta et ordnet utvalg av 3 elementer (batterier) fra totalt 5, uten tilbakelegging. Tabellen under viser antall muligheter for batterivalg for de tre dronene:

Drone 1	Drone 2	Drone 3
5	4	3

Totalt antall muligheter: $5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{\underline{60}}$.

Alternativ framgangsmåte: Tabellen under viser de forskjellige måtene å fordele batteriene på i de tilfellene hvor batteri A er plassert i drone 1 (dvs. tabellen viser kun 1/5 av alle mulighetene, ettersom man ha hensholdsvis batteri A, B, C, D og E i drone 1).

Drone 1	Drone 2	Drone 3
A	B	C
A	B	D
A	B	E
A	C	B
A	C	D
A	C	E
A	D	B
A	D	C
A	D	E
A	E	B
A	E	C
A	E	D

Totalt: 12 muligheter

Ettersom dette utgjør 1/5 av alle tilfellene, blir det totale antall muligheter å fordele de 5 batteriene på 3 droner lik $12 \cdot 5 = \underline{\underline{60}}$.

Oppgave 2

Levetiden T til en type elektriske komponenter er Weibullfordelt som $W(\eta = 75, \beta = 3)$.

a) Forventet levetid $E(T)$ er gitt ved

$$E(T) = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right),$$

der Γ er gammafunksjonen som er tabulert på formelarket. Vi får:

$$\begin{aligned} E(T) &= \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \\ &= 75 \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{3} \right) \\ &\approx 75 \cdot \Gamma(1.33) \\ &= 75 \cdot 0.89338 \text{ (tabell i avsnitt 13 på formelark)} \\ &= 67.0035 \\ &\approx \underline{\underline{67}} \end{aligned}$$

b) Vi skal finne sannsynligheten for at en tilfeldig komponent har en levetid på mer 70 timer. Vi skal altså bestemme

$$P(60 \leq T \leq 70) = P(T \leq 70) - P(T \leq 60) \text{ ("deler opp")},$$

der vi finner $P(T \leq 70)$ osv. fra den kumulative Weibullfordelingen,

$$P(T \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$$

Får at:

$$\begin{aligned} P(60 \leq T \leq 70) &= P(T \leq 70) - P(T \leq 60) \\ &= \left(1 - e^{-\left(\frac{70}{\eta}\right)^\beta} \right) - \left(1 - e^{-\left(\frac{60}{\eta}\right)^\beta} \right) \\ &= e^{-\left(\frac{60}{\eta}\right)^\beta} - e^{-\left(\frac{70}{\eta}\right)^\beta} \\ &= e^{-\left(\frac{60}{75}\right)^3} - e^{-\left(\frac{70}{75}\right)^3} \\ &= \underline{\underline{0.156}} \end{aligned}$$

c) Vi skal finne sannsynligheten for at den **gjennomsnittlige** levetiden til 200 slike komponenter blir mellom 60 og 70 timer. Ettersom de 200 målingene $T_1, T_2, T_3, \dots$,

T_{200} er uavhengige og har samme fordeling (samme forventning μ og varians σ^2), tilsier **sentralgrenseteoremet** at gjennomsnittet $\bar{T}$ av målingene blir **tilnærmet normalfordelt** som $\bar{T} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Forventningsverdien μ fant vi i oppgave a), lik

$$\mu = E(T) = 67$$

Vi skal altså bestemme $P(60 \leq \bar{T} \leq 70)$, men da trenger vi først å bestemme variansen til $\bar{T}$, som er $\frac{\sigma^2}{n}$. Vi finner variansen σ^2 for en enkeltmåling fra formelarket:

$$\begin{aligned} Var(T) &= \sigma^2 = \eta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right)^2 \right) \\ &= 75^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{3}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) \right)^2 \right) \\ &= 75^2 \left(\Gamma(1.66) - (\Gamma(1.33))^2 \right) \\ &= 75^2 (0.90167 - 0.89338^2) \quad (\text{tabell i avsnitt 13 på formelark}) \\ &= \underline{582.4} \end{aligned}$$

Variansen til den gjennomsnittlige levetiden $\bar{T}$ blir altså

$$Var(\bar{T}) = \frac{\sigma^2}{200} = \frac{582.4}{200} = \underline{2.912},$$

slik at standardavviket for $\bar{T}$ blir

$$\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{Var(\bar{T})} = \sqrt{2.912} = \underline{1.706}$$

Gjennomsnittlig levetid har altså fordelingen $\bar{T} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \sim N(67, 2.912)$. Vi finner da den etterspurte sannsynligheten ved hjelp av den kumulative normalfordelingen på kalkulator (merk at standardavviket):

```
Normal C.D
Lower : 60
Upper : 70
σ      : 1.70645832
μ      : 67
Save Res: None
Execute
```

```
Normal C.D
P      = 0.96062855
```

Altså:

$$P(60 \leq \bar{T} \leq 70) = \underline{\underline{0.961}}$$

Vi kan også løse dette ved å omforme til standard normalfordeling og bruke tabell:

$$\begin{aligned} P(60 \leq \bar{T} \leq 70) &= P(\bar{T} \leq 70) - P(\bar{T} \leq 60) \\ &= P\left(\frac{\bar{T} - \mu}{\sigma_{\bar{T}}} \leq \frac{70 - \mu}{\sigma_{\bar{T}}}\right) - P\left(\frac{\bar{T} - \mu}{\sigma_{\bar{T}}} \leq \frac{60 - \mu}{\sigma_{\bar{T}}}\right) \quad (\text{normaliserer}) \\ &= P\left(Z \leq \frac{70 - 67}{1.706}\right) - P\left(Z \leq \frac{60 - 67}{1.706}\right) \\ &= P(Z \leq 1.76) - P(Z \leq -4.10) \\ &= P(Z \leq 1.76) - (1 - P(Z \leq 4.10)) \quad (\text{bruker formel for negative } Z\text{-verdier}) \\ &= 0.9608 - (1 - 1.0) \quad (\text{bruker tabell for } N(0, 1)) \\ &= 0.9608 \\ &\approx \underline{\underline{0.961}} \end{aligned}$$

Kommentar: standard normalfordeling går såpass raskt mot null at $P(Z \leq 4.10) = 1.0$ - så selv om tabellen for kumulativ sannsynlighet for $N(0, 1)$ stopper på $Z = 3.99$, så er $P(Z \leq z) = 1.0$ for alle $z \geq 4$.

Oppgave 3

a) Gitt: antall studenter X som ankommer lærerens kontor er Poisson-fordelt med forventningsverdi $\lambda = 4$ (studenter). Vi skal bestemme sannsynligheten for at det ankommer flere enn 2 studenter i løpet av en time, dvs.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)) \end{aligned}$$

Med dette oppsettet bruker vi punktsannsynligheten for Poisson-fordelingen

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - (P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)) \\ &= 1 - \left(\frac{4^2 e^{-4}}{2!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^0 e^{-4}}{0!} \right) \\ &= \underline{\underline{0.762}} \end{aligned}$$

Vi kan også bruke kumulativ Poisson-fordeling på kalkulator til å finne $P(X \leq 2)$. Regnestykket blir da

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - 0.238 \text{ (fra kalkulator med } \lambda = 4 \text{ og } x = 2) \\ &= \underline{\underline{0.762}} \end{aligned}$$

b) Tiden T det tar før første hendelse i en Poissonprosess (slik som vi har her) inntrer, er eksponentialfordelt med intensitet $\alpha = \frac{\text{forventet antall hendelser}}{\text{tidsintervall}}$. Ettersom vi har forventer 4 studenter i løpet av en time, dvs. 60 minutter, er intensiteten i antall per time lik

$$\alpha = \frac{4 \text{ studenter}}{60 \text{ min}} = \frac{1 \text{ student}}{15 \text{ min}}$$

Dersom vi ønsker å regne tiden i timer istedet, blir intensiteten

$$\alpha = \frac{4 \text{ studenter}}{1 \text{ h}} = 4 \frac{\text{studenter}}{\text{h}}$$

Tiden T er altså eksponentialfordelt med $\alpha = \frac{1}{15}$ (evt. $\alpha = 4$ hvis vi regner tiden i timer). Sannsynligheten for at det tar mer enn 30 minutter til første student ankommer, er

$$P(T > 30) = 1 - P(T \leq 30),$$

der den kumulative eksponentialfordelingen er gitt ved

$$P(T \leq t) = F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Det gir:

$$\begin{aligned} P(T > 30) &= 1 - P(T \leq 30) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{15} \cdot 30}\right) \\ &= e^{-2} \\ &= \underline{\underline{0.135}} \end{aligned}$$

Det samme regnestykket hvis vi regner i timer ($30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}$):

$$\begin{aligned} P\left(T > \frac{1}{2}\right) &= 1 - P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-4 \cdot \frac{1}{2}}\right) \\ &= e^{-2} \\ &= \underline{\underline{0.135}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Bremselengden X til en bil på våt asfalt er normalfordelt som $X \sim N(\mu, \sigma^2) \sim N(18.0, 1.5^2)$. Sannsynligheten for at målt bremselengde blir over 20.0 m, er gitt ved

$$P(X \geq 20.0) = 1 - P(X \leq 20.0)$$

Her kan vi bruke den kumulative normalfordelingen på kalkulator til å bestemme $P(X \leq 20.0)$:

```
Normal C.D
Lower  :-100
Upper  :20
σ      :1.5
μ      :18
Save Res:None
Execute
None LIST

Normal C.D
P      =0.90878878
```

Svaret blir altså

$$\begin{aligned} P(X \geq 20.0) &= 1 - P(X \leq 20.0) \\ &= 1 - 0.909 \\ &= \underline{\underline{0.091}} \end{aligned}$$

b) To identiske biler utstyrt med dekkene i forrige oppgave begynner oppbremsing idet avstanden mellom bilene er 40.0 m, og vi skal bestemme sannsynligheten for at de **ikke** kolliderer. Hvis X_1 og X_2 angir bremselengden til de to bilene, skal vi altså finne sannsynligheten for at samlet bremselengde blir mindre enn 40.0 m, dvs. vi skal finne sannsynligheten

$$P(X_1 + X_2 < 40.0)$$

Her må vi først bestemme fordelingen til variabelen $Y = X_1 + X_2$, dvs. vi må bestemme forventningsverdi og varians for Y . Fra regnereglene for hhv. forventning og varians får vi:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2\mu = 2 \cdot 18.0 \text{ m} = \underline{\underline{36.0 \text{ m}}} \\ Var(Y) &= Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \cdot \sigma^2 = \underline{\underline{2 \cdot (1.5 \text{ m})^2}} \end{aligned}$$

Det gir:

$$P(\text{ikke kollisjon}) = P(Y < 40.0),$$

der vi bruker kumulativ normalfordeling på kalkulator:

```

Normal C.D
Lower    :-100
Upper    :40
σ        :2.12132034
P        :36
Save Res:None
Execute
None LIST

Normal C.D
P        =0.97032678

```

Det gir:

$$P(\text{ikke kollisjon}) = P(Y < 40.0) = \underline{0.970}$$

Det er altså 97 % sannsynlighet for at bilene ikke kolliderer.

Oppgave 5

a) Et 90 % konfidensintervall for bremselengden til den nye gummiblandingen er gitt ved

$$\bar{X} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

som med $\alpha = 0.10$, den oppgitte verdiene $\bar{X} = 83.15$, $\sigma = 3.0$ m og $n = 10$ blir lik

$$\begin{aligned}
 & 83.15 \pm u_{\frac{0.10}{2}} \frac{3.0}{\sqrt{10}} \\
 = & 83.15 \pm u_{0.05} \frac{3.0}{\sqrt{10}} \\
 = & 83.15 \pm 1.645 \cdot \frac{3.0}{\sqrt{10}} \\
 = & \underline{\underline{[81.6, 84.7]}}
 \end{aligned}$$

b) Vi skal gjennomføre en hypotesetest med signifikansnivå 5 % for å avgjøre hvorvidt den nye gummiblandingen gir kortere bremselengde enn den eksisterende. Hypotesene:

$$H_0 : \mu = 85.0$$

$$H_1 : \mu < 85.0$$

Vi beregner testobservatoren

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \\
 &= \frac{83.15 - 85.0}{\frac{3.0}{\sqrt{10}}} \\
 &= \underline{\underline{-1.950}}
 \end{aligned}$$

Vi forkaster H_0 dersom $|U_0| > u_\alpha$, som her er $u_{0.05} = 1.645$. Altså er kriteriet for å forkaste H_0 oppfylt:

Dataene tyder på at den nye gummiblandingen gir kortere bremselengde enn den eksisterende.

c) Vi skal gjennomføre den samme hypotesetesten dersom standardavviket antas ukjent. Den empiriske variansen for målingene er oppgitt å være

$$S^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 2.866^2,$$

slik at det empiriske standardavviket blir

$$S = \sqrt{S^2} = 2.866$$

For ukjent σ bruker vi testobservatoren

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{83.15 - 85.0}{\frac{2.866}{\sqrt{10}}} \\ &= \underline{\underline{-2.041}} \end{aligned}$$

Vi sammenlikner denne med kvantilen $t_{\alpha,n,1} = t_{0.05,9} = 1.833$ (fra kvantiltabell for t-fordeling på formelark). Vi forkaster H_0 dersom $|T_0| > t_{\alpha,n-1}$, noe vi ser er tilfelle her.

Også med ukjent standardavvik tyder dataene på at den nye blandingen gir kortere bremselengde.