Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i ISTA1001, ISTA1002, ISTA1003, ISTG1001, ISTG1002, ISTG1003, ISTT1001, ISTT1002, ISTT1003, VB6200 Statistikk

Eksamensdato: 29.10.2021

Eksamenstid (frå-til): 09:00 – 12:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C
Godkjend kalkulator
Digitale ressursar under eksamen: Formelark og fem tabellar (binomisk kumulativfordeling, Poisson kumulativfordeling, normal kumulativfordling, normalfordeling kritisk verdi og t-fordeling kritisk verdi) er lagt ved eksamen som pdf-filer

Fagleg kontakt under eksamen:
Mette Langaas (988 47 649)
Ketil Arnesen (952 93 103)

ANNA INFORMASJON:

Vend deg til ei eksamensvakt om du ønskjer å kontakte fagleg kontaktperson under eksamen. Noter spørsmålet ditt på førehand. Fagleg kontaktperson skal berre kontaktast dersom det er direkte feil eller manglar i oppgåvesettet.

Tallsvar: For kvar oppgave der du skal skrive inn eit tallsvar er det oppgitt antal desimalar du skal skrive inn. Både desimalkomma og desimalpunktum kan brukast.

Vekting av oppgåvene: er gjeve for kvar oppgåve. Det blir ikkje gjeve minus-poeng for eit galt svar på ein oppgave.

Lagring: Svara dine i Inspera Assessment blir lagra automatisk kvart 15. sekund.

Varslinger: Dersom det oppstår behov for å gje beskjedar til kandidatane medan eksamen er i gang (til dømes ved klare manglar i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslingar i Inspera. Eit varsel vil dukke opp som ein dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne att varselet ved å klikke på bjølla i øvre høgre hjørne på skjermen.

Trekk frå eksamen: Blir du sjuk under eksamen, eller av andre grunnar ønskjer å levere blankt/trekkje deg, gå til «hamburgarmenyen» i øvre høgre hjørne og vel «Lever blankt». Dette kan ikkje angrast sjølv om prøven framleis er open. Tilkall så eksamensvakt og følg instruksane frå eksamensvakta.

Tilgang til besvarelse: Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1 Oppgåve 1: Hendingar

Innleiing:
Ei bedrift produserar solcellepanel, og det blir gjort ein kvalitetssjekk av panela før dei blir sende ut på marknaden. For eit tilfeldig vald solcellepanel definerar vi følgande fire hendingar:

- A_1: panelet er feilfritt
- A_2: panelet har ein liten feil
- A_3: panelet har ein alvorleg feil
- B : ein inspektør har markert at det *kan* vere eit problem med panelet

Her er hendingane A_1, A_2, A_3 ei oppdeling (ein partisjon) av utfallsrommet, dvs. at nøyaktig éi av dei inntreff (dei er parvis disjunkte og unionen er utfallsrommet).
Erfaring viser at vi kan anta følgande betinga sannsyn:
$P(B \mid A_1) = 0.01, P(B \mid A_2) = 0.80,$ og $P(B \mid A_3) = 0.90.$ Videre er
$P(A_1) = 0.97$ og $P(A_2) = 0.02.$

Spørsmål:

a) Kva er sannsynet for at eit tilfeldig valt solcellepanel har ein alvorleg feil, $P(A_3)$?

Vel eitt alternativ

- 0.01
- 0.02
- 0.90
- 0.97
- 0.50
- 0.03

b) Kva er sannsynet for at inspektøren har markert at det kan vere eit problem med eit tilfeldig valt solcellepanel, $P(B)$?

Vel eitt alternativ

- 0.2543
- 0.0200
- 0.0347
- 0.1645
- 0.0090
- 0.0097

c) Kor sannsynleg er det at solcellepanelet har ein alvorleg feil, gitt at inspektøren har markert at det kan vere eit problem, dvs. $P(A_3 \mid B)$?
Oppgi svaret med 3 desimalar, til dømes 0.123 eller 0.987.

Maks poeng: 15

2 Oppgåve 2: Poissonfordelt stokastisk variabel

Innleiing:
Vi antek at antal tarmbakteriar, X, i v liter vatn frå ei drikkevannskjelde er poissonfordelt med punktsannsyn
$P(X=x)=\frac{(\lambda v)^x}{x!}e^{-\lambda v}, x=0,1,2,\dots$
Vi kallar λ for foruréiningsgrada av vatnet. I denne oppgåva antek vi at $\lambda=3$.

Spørsmål:
a) Kva er sannsynet for at ei prøve av $v=1$ liter drikkevatn ikkje inneheld nokon tarmbakteriar? Skriv inn svaret med 3 desimalar, til dømes 0.123 eller 0.987.

b) Gitt at ein veit at ei prøve på $v=0.5$ liter drikkevatn inneheld minst ein tarmbakterie, kva er det betinga sannsynet for at prøven inneheld akkurat 2 tarmbakteriar? Skriv inn svaret med 3 desimalar, til dømes 0.123 eller 0.987.

c) Kor mange liter vatn (v) må ei prøve minst innehalde for at denne prøva med sannsyn minst 0.9975 skal innehalde ein eller fleire tarmbakteriar?

Vel eitt alternativ

- 0.5 liter
- 1 liter
- 1.5 liter
- 2 liter
- 2.5 liter
- 3 liter
- 3.5 liter
- 4 liter

Maks poeng: 15

3 Oppgåve 3: Normalfordelte kulediameterar

Innlediing:

Ei bedrift produserar kuler som skal nyttast i kulelager. Kulelager er ein viktig del av mange verktøy og hushaldningsapparat.

Diameteren til kulene antakast å vere normalfordelte med forventningsverdi 20 mm og standardavvik 0.1 mm. Diameteren til ei kule er uavhengig av diameteren til dei andre kulene.

Spørsmål:

a) Kva er sannsynliget for at ei tilfeldig vald kule har diameter mindre enn 19.9 mm? Skriv inn svaret med 4 desimalar, til dømes 0.1234 eller 0.9876.

b) Kva er sannsynet for at gjennomsnittleg diameter til 9 tilfeldig valde kuler er større enn 20.05 mm? Skriv inn svaret med 4 desimalar, til dømes 0.1234 eller 0.9876.

c) Hva er sannsynet for at skilnaden i diameter mellom to tilfeldig valde kuler er mindre enn 0.1 mm? Skriv inn svaret med 4 desimalar, til dømes 0.1234 eller 0.9876.

Maks poeng: 15

4 Oppgåve 4: Forventningsverdi og varians

Innleiing:
La X og Y vere to uavhengige stokastiske variablar med $\mathrm{E}(X) = 0$, $\mathrm{E}(Y) = -2$, $\mathrm{Var}(X) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$.

Spørsmål:
a) Finn forventningsverdi og varians til $X + 2Y$. Gje svara som heiltal.

$\mathrm{E}(X + 2Y) =$ ☐

$\mathrm{Var}(X + 2Y) =$ ☐

Innledning: La X ha forventningsverdi og varians som gitt over. La V vere ein stokastisk variabel med $\mathrm{E}(V) = 1$ og $\mathrm{Var}(V) = 4$. Vidare er $\mathrm{Cov}(X, V) = 1$.

Spørsmål:
b) Finn forventningsverdi og varians til $2X - 3V$. Gje svara som heiltal.

$\mathrm{E}(2X - 3V) =$ ☐

$\mathrm{Var}(2X - 3V) =$ ☐

Maks poeng: 15

5 Oppgåve 5: Punktestimering

Innleiing:

Som i oppgåve 2, antek vi at antal tarmbakteriar, X, i v liter vann frå ei drikkevatnskjelde er poissonfordelt med punktsannsyn

$P(X = x) = \frac{(\lambda v)^x}{x!} e^{-\lambda v}, x = 0, 1, 2, \ldots$

Vi kallar λ for forureiningsgrada av vatnet, og i **denne oppgåva er λ ukjend.**

Vi vil samle inn data frå n uavhengige prøver, der vi antek at forureiningsgrada er den same i alle prøvene. For kvar prøve nyttar vi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ for antal liter av drikkevatnet, og $X_1, X_2, \ldots, X_n$ for dei tilhøyrande antala tarmbakteriar.

Vi skal sjå på ein estimator for forureiningsgrada λ:

$\widehat{\lambda} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$

Spørsmål:

a) Kva er forventningsverdien til estimatoren $\widehat{\lambda}$?

Vel eitt alternativ

- $\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n v_i}$
- $\lambda \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- $\lambda \sum_{i=1}^n X_i$
- $\lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}$
- $\lambda \sum_{i=1}^n v_i$
- λ

b) Kva er variansen til estimatoren $\widehat{\lambda}$?

Vel eitt alternativ

- $\frac{\lambda}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i}$
- $\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$
- $\frac{\lambda}{n^2} \sum_{i=1}^{n} v_i^2$
- $\frac{\lambda}{(\sum_{i=1}^{n} v_i)^2}$
- $\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$
- $\frac{\lambda}{n^3} \sum_{i=1}^{n} v_i$

c) Kva eigenskapar har ein god estimator?
Vel eitt alternativ

- Låg forventningsverdi og låg varians
- Høg forventningsverdi og høg varians
- Låg forveningsverdi og høg varians
- Forventningsrett og låg varians
- Forventningsrett og høg varians
- Høg forventningsverdi og låg varians

Maks poeng: 10

6 Oppgåve 6: Konfidensintervall og hypotesetest

Innleiing:
Anta at X er normalfordelt med ukjend forventningsverdi μ og ukjend standardavvik σ.
Vi samlar inn data frå eit tilfeldig utval på $n = 10$ observasjonar frå ein populasjon, og observerar $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 95.51$ og $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 354.56$.

Spørsmål:
a) Kva blir nedre og øvre grense i eit 95% konfidensintervall for μ?

Vel eitt alternativ

- (93.45,97.57)
- (349.23,359.89)
- (91.02,100.00)
- (95.51,354.56)
- (92.45,98.57)
- (95.00,96.02)
- (87.54,103.48)
- (94.22,96.80)

Innleiing:
Anta at du har eit 95% konfidensintervall for μ med nedre grense 50.0 og øvre grense 60.0. Du vil utføre ein hypotesetest med nullhypotese $H_0 : \mu = \mu_0$ og alternativ hypotese $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Spørsmål:
b) Angje ein mogeleg verdi for μ_0, som ville gjort at du *ikkje forkasta* nullhypotesa med signifikansnivå 5%? Skriv svaret med 1 desimal, til dømes 1.2 eller 98.7.

Maks poeng: 10

7 Oppgåve 7: Hypotesetest

Innleiing:
Steinprøver som er tatt frå eit geologisk felt blir analysert kjemisk for å bestemme innhaldet av eit spesielt grunnstoff. La X vere innhaldet (målt i gram) av grunnstoffet i ei tilfeldig vald prøve på 100 gram. Vi antek at X er normalfordelt med forventningsverdi μ og kjend standardavvik $\sigma = 1$ gram. Dersom forventningsverdien μ er større enn 5 gram, blir feltet rekna som drivverdig, og ein vil ønskje å starte utvinning av grunnstoffet. Desse opplysningane gjeld i heile oppgåva.

Spørsmål:
a) Eit gruveselskap ønskjer å undersøke om feltet er drivverdig. Sett opp ein alternativ hypotese for å undersøkje om feltet er drivverdig.

Den alternative hypotesen H_1 er [Vel alternativ] (μ ≠ 5 gram, μ< 5 gram, μ > 5 gram, μ = 5 gram)

Innleiing:
For å utføre hypotesetesten vil vi samle inn data på innhaldet av grunnstoffet i $n = 10$ uavhengige og tilfeldig valde steinprøver $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$. Vi får verdiane $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ og finn at $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 5.74$.
Vi skal bruke signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Spørsmål:
b) Kva for eit av dei følgande uttrykka er ein testobservator for hypotesetesten?
Vel eitt alternativ

- ○ $\frac{\bar{X}-5.74}{1}$
- ○ $\frac{\bar{X}-5}{\sqrt{10}}$
- ○ $\frac{\bar{X}-5.74}{\sqrt{10}}$
- ○ $\frac{\bar{X}-5}{1/\sqrt{10}}$
- ○ $\frac{\bar{X}-5}{1}$
- ○ $\frac{\bar{X}-5.74}{1/\sqrt{10}}$

c) Utfør hypotesetesen. Kva blir konklusjonen?

Vel eitt alternativ

- Testobservatoren er større enn kritisk verdi og vi forkastar nullhypotesen.
- Testobservatoren er mindre enn kritisk verdi og vi forkastar nullhypotesen.
- Testobservatoren er større enn kritisk verdi og vi forkastar ikkje nullhypotesen.
- Testobservatoren er mindre enn kritisk verdi og vi forkastar ikkje nullhypotesen.

d) Anta at verdien til testobservatoren i punkt b) blei 2.0**.** Rekn ut *p*-verdien for hypotesetesten for denne verdien av testobservatoren. Oppgje svaret med 3 desimalar, til dømes 0.123 eller 0.987.

e) Rekn ut teststyrken til testen når forventningsverdien til innhaldet av grunnstoffet er $\mu = 6$ gram. Framleis er $\sigma = 1$ gram, utvalsstorleiken $n = 10$ og signifikansnivået $\alpha = 0.05$. Oppgje svaret med 3 desimalar, til dømes 0.123 eller 0.987. Det blir gitt at den numeriske verdien til testobservatoren ikkje inngår i denne utrekninga.

Maks poeng: 20