

i Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i ISTA1001, ISTA1002, ISTA1003, ISTG1001, ISTG1002, ISTG1003, ISTT1001, ISTT1002, ISTT1003, VB6200 Statistikk

Eksamensdato: 29.10.2021

Eksamenstid (fra-til): 09:00 – 12:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent kalkulator

Digitale ressurser under eksamen: Formelark og fem tabeller (binomisk kumulativfordeling, Poisson kumulativfordeling, normal kumulativfordeling, normalfordeling kritisk verdi og t-fordeling kritisk verdi) er lagt ved eksamen som pdf-filer

Faglig kontakt under eksamen:

Mette Langaas (988 47 649)

Ketil Arnesen (952 93 103)

ANNEN INFORMASJON:

Henvend deg til en eksamensvakt hvis du ønsker å kontakte faglig kontaktperson under eksamen. Noter spørsmålet ditt på forhånd. Faglig kontaktperson skal kun kontaktes dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet.

Tallsvar: For hver oppgave der du skal skrive inn et tallsvar er det oppgitt antall desimaler du skal skrive inn. Både desimalkomma og desimalpunktum kan brukes.

Vekting av oppgavene: er oppgitt for hver oppgave. Det gis ikke minus-poeng for et galt svar på en oppgave.

Lagring: Besvarelsen din i Inspira Assessment lagres automatisk hvert 15. sekund.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved klare mangler i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspira. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspira. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst i høyre hjørne på skjermen.

Trekk fra eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/trekke deg, gå til «hamburgermenyen» i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen. Tilkall så eksamensvakt og følg instruksene fra eksamensvakten.

Tilgang til besvarelse: Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

1 Oppgave 1: Hendelser

Innledning:

En bedrift produserer solcellepaneler, og det gjøres en kvalitetssjekk av panelene før de sendes ut på markedet. For et tilfeldig valgt solcellepanel definerer vi følgende fire hendelser:

- A_1 : panelet er feilfritt
- A_2 : panelet har en liten feil
- A_3 : panelet har en alvorlig feil
- B : en inspektør har markert at det *kan* være et problem med panelet

Her er hendelsene A_1, A_2, A_3 en oppdeling (partisjon) av utfallsrommet, dvs. at nøyaktig én av dem inntreffer (de er parvis disjunkte og unionen er utfallsrommet).

Erfaring viser at vi kan anta følgende betingede sannsynligheter:

$P(B | A_1) = 0.01$, $P(B | A_2) = 0.80$, og $P(B | A_3) = 0.90$. Videre er $P(A_1) = 0.97$ og $P(A_2) = 0.02$.

Spørsmål:

a) Hva er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt solcellepanel har en alvorlig feil, $P(A_3)$?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.02
- ☐ 0.03
- ☐ 0.90
- ☐ 0.50
- ☐ 0.97
- ☐ 0.01

b) Hva er sannsynligheten for at inspektøren har markert at det kan være et problem med et tilfeldig valgt solcellepanel, $P(B)$?

Velg ett alternativ

☐ 0.2543

☐ 0.0200

☐ 0.0090

☐ 0.1645

☐ 0.0347

☐ 0.0097

c) Hvor sannsynlig er det at solcellepanelet har en alvorlig feil, gitt at inspektøren har markert at det kan være et problem, dvs. $P(A_3 \mid B)$?

Oppgi svaret med 3 desimaler, f.eks. 0.123 eller 0.987.

Maks poeng: 15

2 Oppgave 2: Poissonfordelt stokastisk variabel

Innledning:

Vi antar at antall tarmbakterier, X , i v liter vann fra en drikkevannskilde er poissonfordelt med punktsannsynlighet

$$P(X = x) = \frac{(\lambda v)^x}{x!} e^{-\lambda v}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Vi kaller λ for forurensningsgraden av vannet. I denne oppgaven antar vi at $\lambda = 3$.

Spørsmål:

a) Hva er sannsynligheten for at en prøve av $v = 1$ liter drikkevann ikke inneholder noen tarmbakterier? Skriv inn svaret med 3 desimaler, f.eks. 0.123 eller 0.987.

b) Gitt at man vet at en prøve på $v = 0.5$ liter drikkevann inneholder minst en tarmbakterie, hva er den betingede sannsynligheten for at prøven inneholder akkurat 2 tarmbakterier? Skriv inn svaret med 3 desimaler, f.eks. 0.123 eller 0.987.

c) Hvor mange liter vann (v) må en prøve minst inneholde for at denne prøven med sannsynlighet minst 0.9975 skal inneholde en eller flere tarmbakterier?

Velg ett alternativ

0.5 liter

☐

1 liter

☐

1.5 liter

☐

2 liter

☐

2.5 liter

☐

3 liter

☐

3.5 liter

☐

4 liter

☐

Maks poeng: 15

3 Oppgave 3: Normalfordelte kulediametere

Innledning:

En bedrift produserer kuler som skal brukes i kulelager. Kulelager er en viktig del av mange verktøy og husholdningsapparater.

Diameteren til kulene antas å være normalfordelt med forventningsverdi 20 mm og standardavvik 0.1 mm. Diameteren til en kule er uavhengig av diameteren til de andre kulene.

Spørsmål:

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kule har diameter mindre enn 19.9 mm? Skriv inn svaret med 4 desimaler, f.eks. 0.1234 eller 0.9876.

b) Hva er sannsynligheten for at gjennomsnittlig diameter til 9 tilfeldig valgte kuler er større enn 20.05 mm? Skriv inn svaret med 4 desimaler, f.eks. 0.1234 eller 0.9876.

c) Hva er sannsynligheten for at forskjellen i diameter mellom to tilfeldig valgte kuler er mindre enn 0.1 mm? Skriv inn svaret med 4 desimaler, f.eks. 0.1234 eller 0.9876.

Maks poeng: 15

4 Oppgave 4: Forventningsverdi og varians

Innledning:

La X og Y være to uavhengige stokastiske variabler med $E(X) = 0$, $E(Y) = -2$, $\text{Var}(X) = 3$, $\text{Var}(Y) = 1$.

Spørsmål:

a) Finn forventningsverdi og varians til $X + 2Y$. Angi svarene som heltall.

$$E(X + 2Y) = \boxed{}$$

$$\text{Var}(X + 2Y) = \boxed{}$$

Innledning: La X ha forventningsverdi og varians som oppgitt over. La V være en stokastisk variabel med $E(V) = 1$ og $\text{Var}(V) = 4$. Videre er $\text{Cov}(X, V) = 1$.

Spørsmål:

b) Finn forventningsverdi og varians til $2X - 3V$. Angi svarene som heltall.

$$E(2X - 3V) = \boxed{}$$

$$\text{Var}(2X - 3V) = \boxed{}$$

Maks poeng: 15

5 Oppgave 5: Punktestimering

Innledning:

Som i oppgave 2, antar vi at antall tarmbakterier, X , i v liter vann fra en drikkevannskilde er poissonfordelt med punktsannsynlighet

$$P(X = x) = \frac{(\lambda v)^x}{x!} e^{-\lambda v}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Vi kaller λ for forurensningsgraden av vannet, og i **denne oppgaven er λ ukjent**.

Vi vil samle inn data fra n uavhengige prøver, der vi antar at forurensningsgraden er den samme i alle prøvene. For hver prøve bruker vi $v_1, v_2, \dots, v_n$ for antall liter av drikkevannet, og $X_1, X_2, \dots, X_n$ for de tilhørende antallene tarmbakterier.

Vi skal se på en estimator for forurensningsgraden λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{v_1 + v_2 + \dots + v_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$$

Spørsmål:

a) Hva er forventningsverdien til estimatoren $\hat{\lambda}$?

Velg ett alternativ

- ☐ $\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n v_i}$
- ☐ λ
- ☐ $\lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}$
- ☐ $\lambda \frac{1}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- ☐ $\lambda \sum_{i=1}^n v_i$
- ☐ $\lambda \sum_{i=1}^n X_i$

b) Hva er variansen til estimatoren $\hat{\lambda}$?

Velg ett alternativ

- ☐ $\frac{\sum_{i=1}^n v_i X_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$
- ☐ $\frac{\lambda}{n^2} \sum_{i=1}^n v_i^2$
- ☐ $\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n v_i}$
- ☐ $\frac{\lambda}{n^3} \sum_{i=1}^n v_i$
- ☐ $\frac{\lambda}{(\sum_{i=1}^n v_i)^2}$
- ☐ $\frac{\lambda}{n^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i}$

c) Hvilke egenskaper har en god estimator?

Velg ett alternativ

- ☐ Forventningsrett og høy varians
- ☐ Høy forventningsverdi og høy varians
- ☐ Forventningsrett og lav varians
- ☐ Lav forventningsverdi og høy varians
- ☐ Høy forventningsverdi og lav varians
- ☐ Lav forventningsverdi og lav varians

Maks poeng: 10

6 Oppgave 6: Konfidensintervall og hypotesetest

Innledning:

Anta at X er normalfordelt med ukjent forventningsverdi μ og ukjent standardavvik σ .

Vi samler inn data fra et tilfeldig utvalg på $n = 10$ observasjoner fra en populasjon, og observerer

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 95.51 \text{ og } \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 354.56.$$

Spørsmål:

a) Hva blir nedre og øvre grense i et 95% konfidensintervall for μ ?

Velg ett alternativ

- ☐ (95.00,96.02)
- ☐ (93.45,97.57)
- ☐ (95.51,354.56)
- ☐ (87.54,103.48)
- ☐ (349.23,359.89)
- ☐ (92.45,98.57)
- ☐ (94.22,96.80)
- ☐ (91.02,100.00)

Innledning

Anta at du har et 95% konfidensintervall for μ med nedre grense 50.0 og øvre grense 60.0. Du vil utføre en hypotesetest med nullhypotese $H_0 : \mu = \mu_0$ og alternativ hypotese $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

Spørsmål:

b) Angi en mulig verdi for μ_0 , som ville gjort at du *ikke forkastet* nullhypotesen med signifikansnivå 5%? Skriv svaret med 1 desimal, f.eks. 1.2 eller 98.7.

Maks poeng: 10

7 Oppgave 7: Hypotesetest

Innledning:

Steinprøver som er tatt fra et geologisk felt blir analysert kjemisk for å bestemme innholdet av et spesielt grunnstoff. La $\bar{X}$ være innholdet (målt i gram) av grunnstoffet i en tilfeldig valgt prøve på 100 gram. Vi antar at $\bar{X}$ er normalfordelt med forventningsverdi μ og kjent standardavvik $\sigma = 1$ gram. Dersom forventningsverdien μ er større enn 5 gram, regnes feltet som drivverdig og en vil ønske å starte utvinning av grunnstoffet. Disse opplysningene gjelder i hele oppgaven.

Spørsmål:

a) Et gruveselskap ønsker å undersøke om feltet er drivverdig. Sett opp en alternativ hypotese for å undersøke om feltet er drivverdig.

Den alternative hypotesen H_1 er ($\mu < 5$ gram, $\mu > 5$ gram, $\mu = 5$ gram, $\mu \neq 5$ gram)

Innledning:

For å utføre hypotesetesten vil vi samle inn data på innholdet av grunnstoffet i $n = 10$ uavhengige og tilfeldig valgte steinprøver $X_1, X_2, \dots, X_{10}$. Vi får verdiene $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ og finner at

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 5.74.$$

Vi skal bruke signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Spørsmål:

b) Hvilket av følgende uttrykk er en testobservator for hypotesetesten?

Velg ett alternativ

- ☐ $\frac{\bar{X}-5}{\sqrt{10}}$
- ☐ $\frac{\bar{X}-5.74}{\sqrt{10}}$
- ☐ $\frac{\bar{X}-5}{1/\sqrt{10}}$
- ☐ $\frac{\bar{X}-5}{1}$
- ☐ $\frac{\bar{X}-5.74}{1}$
- ☐ $\frac{\bar{X}-5.74}{1/\sqrt{10}}$

c) Utfør hypotesetesten. Hva blir konklusjonen?

Velg ett alternativ

- ☐ Testobservatoren er større enn kritisk verdi og vi forkaster ikke nullhypotesen.
- ☐ Testobservatoren er mindre enn kritisk verdi og vi forkaster nullhypotesen.
- ☐ Testobservatoren er større enn kritisk verdi og vi forkaster nullhypotesen.
- ☐ Testobservatoren er mindre enn kritisk verdi og vi forkaster ikke nullhypotesen.

d) Anta at verdien til testobservatoren i punkt b) ble 2.0. Regn ut p -verdien for hypotesetesten for denne verdien av testobservatoren. Oppgi svaret med 3 desimaler, f.eks. 0.123 eller 0.987.

e) Regn ut teststyrken til testen når forventningsverdien til innholdet av grunnstoffet er $\mu = 6$ gram. Fremdeles er $\sigma = 1$ gram, utvalgsstørrelsen $n = 10$ og signifikansnivå α . Oppgi svaret med 3 desimaler, f.eks. 0.123 eller 0.987. Det oppgis at den numeriske verdien til testobservatoren ikke inngår i denne utregningen.

Maks poeng: 20