

i Forside

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i ISTT1001, ISTT1002, ISTT1003, ISTG1001, ISTG1002, ISTG1003, ISTA1001, ISTA1002, ISTA1003 Statistikk

Eksamensdato: 16. august 2024

Eksamenstid (fra-til): 9:00 - 12:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Hjelpemiddelkode C. Godkjent kalkulator. Ingen håndskrevne eller trykte hjelpemidler. Formelark og fem tabeller (binomisk kumulativfordeling, Poisson kumulativfordeling, normal kumulativfordeling, normalfordeling kritisk verdi og t-fordeling kritisk verdi) er lagt ved eksamen som pdf-filer.

Faglig kontakt under eksamen: Thea Bjørnland

Tlf.: 41 12 38 49

Faglig kontakt møter i eksamenslokalet: NEI

ANNEN INFORMASJON:

Skaff deg overblikk over oppgavesettet før du begynner på besvarelsen din.

Les oppgavene nøye. Faglig kontaktperson kontaktes kun dersom det er direkte feil eller mangler i oppgavesettet. Henvend deg til en eksamensvakt hvis du mistenker feil og mangler. Noter spørsmålet ditt på forhånd.

Ingen håndtegninger: Denne eksamenen tillater ikke bruk av håndtegninger. Har du likevel fått utdelt skanne-ark, er dette en feil. **Arkene vil ikke bli akseptert for innlevering, og de vil derfor heller ikke sendes til sensur.**

Vekting av oppgavene: Det er 22 deloppgaver, og alle deloppgaver teller likt. Det gis ikke minuspoeng for gale eller manglede svar.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspira. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst til høyre.

Trekk fra/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg «Lever blankt». Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

Tilgang til besvarelse: Etter eksamen finner du besvarelsen din i arkivet i Inspira. Merk at det kan ta én virkedag før eventuelle håndtegninger vil være tilgjengelige i arkivet.

1 Oppgave 1: Urnemodell

10 batterier ligger i en boks.

a) På hvor mange måter kan vi, når vi trekker uten tilbakelegging og ikke bryr oss om rekkefølgen, trekke tre batterier fra boksen?

Velg ett alternativ:

☐ 220

☐ 60

☐ 180

☐ 120

☐ 30

☐ 240

b) Fire av batteriene i boksen er ødelagte. Hva er sannsynligheten for at vi - når vi trekker tre batterier uten tilbakelegging - trekker minst ett ødelagt batteri?

Velg ett alternativ

☐ 0.577

☐ 0.938

☐ 0.721

☐ 0.412

☐ 0.645

☐ 0.833

c) Batteriene i boksen er nummererte 1, 2, ..., 10. Vi skal trekke ett batteri og la den stokastiske variabelen X representere nummeret på batteriet vi trekker. Hvilken sannsynlighetsfordeling har X ?

Velg ett alternativ

- ☐ Poissonfordeling
- ☐ Normalfordeling
- ☐ Diskret uniformfordeling
- ☐ Kontinuerlig uniformfordeling
- ☐ Binomisk fordeling
- ☐ Eksponensialfordeling

Maks poeng: 3

2 Oppgave 2: Hendelser og sannsynlighet

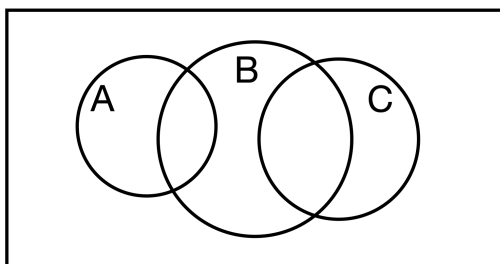
Merk: I denne oppgaven bruker vi A' for å betegne komplementærhendelsen til en hendelse A .

a) Dersom $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ og $P(A \cup B) = 0.9$, hva er $P(A' | B)$?

Velg ett alternativ:

- ☐ 1.0
- ☐ 0.7
- ☐ 0.6
- ☐ 0.9
- ☐ 0.5
- ☐ 0.8

b) Figuren under viser et venndiagram:



Vi har følgende sannsynligheter for hendelsene i venndiagrammet:

$P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.20$, $P(A \cap B) = 0.05$, $P(B \cap C) = 0.10$.

Hva er $P(B \cap A' \cap C')$?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.15
- ☐ 0.05
- ☐ 0.30
- ☐ 0.25
- ☐ 0.20
- ☐ 0.10

Maks poeng: 2

3 Oppgave 3: Fordelinger, forventning og varians

Merk: Angi alle svar i denne oppgaven med tre desimaler etter komma, f.eks 6.891 eller 0.020.

a)

Vi har følgende kontinuerlige fordeling for X:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Hva må konstanten k være for at dette skal være en gyldig sannsynlighetsfordeling? .

b)

Vi har følgende diskrete fordeling for Y:

y	2	3	4
P(Y=y)	0.25	0.45	0.30

Hva er forventningsverdien til Y?

c)

La X være normalfordelt med forventning 2 og standardavvik 0.5. La Y være normalfordelt med forventning 1 og standardavvik 0.8. Korrelasjonen mellom X og Y er -0.45.

Hva er $\text{Var}(2X + Y)$?

Maks poeng: 3

4 Oppgave 4: Poissonfordeling

a) La X representere en Poissonfordelt stokastisk variabel med forventning $E(X) = 3$. Hva er $P(X > 5 | X \leq 8)$? Bruk tabell for kumulative sannsynligheter i Poissonfordelingen.

Velg ett alternativ

- ☐ 0.972
- ☐ 0.845
- ☐ 0.128
- ☐ 0.512
- ☐ 0.080
- ☐ 0.253

b) La X og Y representere uavhengige Poissonfordelte stokastiske variabler med forventning $E(X) = 3$ og $E(Y) = 5$. Hva er $P(X+Y \leq 7)$? Bruk tabell for kumulative sannsynligheter i Poissonfordelingen.

Velg ett alternativ:

- ☐ 0.328
- ☐ 0.453
- ☐ 0.798
- ☐ 0.276
- ☐ 0.591
- ☐ 0.637

c) En Poissonprosess i tid med intensitet (rate) λ skal observeres i 3 ikke-overlappende tidsintervaller av lengde t_1 , t_2 og t_3 . La X_1 , X_2 og X_3 representere antall hendelser i hvert tidsintervall. Hvilket uttrykk representerer *ikke* en forventningsrett estimator for λ ?

Velg ett alternativ

☐ $\sum_{i=1}^3 \frac{X_i}{t_i}$

☐ $\frac{\sum_{i=1}^3 X_i}{\sum_{i=1}^3 t_i}$

☐ $\frac{X_1}{t_1}$

☐ $\frac{X_1}{t_1} + \frac{X_2}{t_2} - \frac{X_3}{t_3}$

☐ $\frac{X_1+X_2}{t_1+t_2}$

☐ $0.5 \cdot \left(\frac{X_2}{t_2} + \frac{X_3}{t_3} \right)$

Maks poeng: 3

5 Oppgave 5: Hypotesetesting

a)

Vi skal utføre en hypotesetest for $H_0 : \mu = 3$ mot $H_1 : \mu < 3$ der μ er forventningsverdien til $n = 16$ uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ der $\text{Var}(X_i) = 2$ for $i = 1, \dots, 16$. Som testobservator bruker vi gjennomsnittet $\bar{X}$, som vil være $N(3, \sqrt{2/16})$ -fordelt når null-hypotesen er sann. Ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$ forkastes H_0 til fordel for H_1 dersom vi observerer $\bar{x} \leq 2.42$.

Dersom H_1 er sann og $\mu = 2.5$, hva blir teststyrken?

Velg ett alternativ:

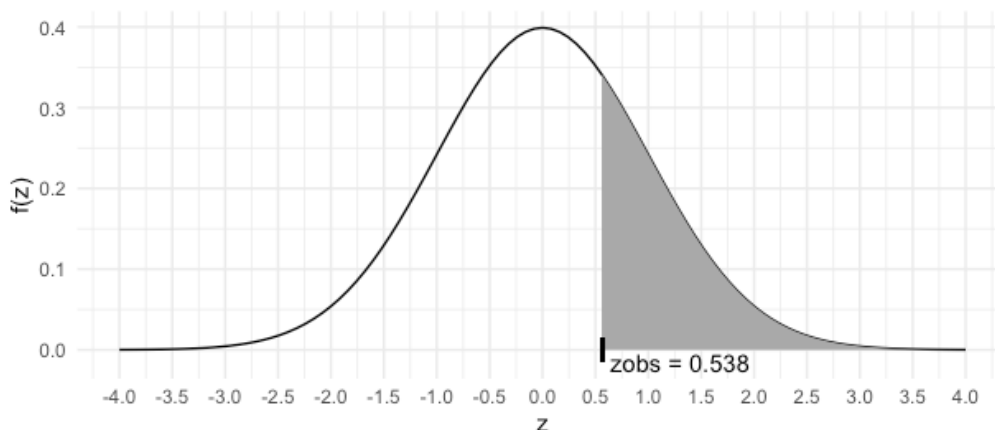
- ☐ 0.89
- ☐ 0.56
- ☐ 0.41
- ☐ 0.66
- ☐ 0.32
- ☐ 0.73

b)

Vi skal utføre en hypotesetest for $H_0 : \mu = 0$ mot $H_1 : \mu > 0$ der μ er forventningsverdien til $n = 10$ uavhengige og normalfordelte stokastiske variabler $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ der $\text{Var}(Y_i) = 1$ for $i = 1, \dots, 10$. Som testobservator bruker vi $Z = \frac{\bar{Y}}{1/\sqrt{10}}$, som vil være standard normalfordelt når null-hypotesen er sann. Vi vil anvende signifikansnivå $\alpha = 0.10$.

Etter at forsøket er gjennomført regner vi ut $\bar{y} = 0.17$.

Hva viser det grå området i figuren?



Velg ett alternativ

- ☐ Forkastningsområdet
- ☐ P-verdien
- ☐ Sannsynlighet for type 2 feil
- ☐ Teststyrke når $\mu = 1$
- ☐ Kritisk verdi
- ☐ Sannsynlighet for type 1 feil

Maks poeng: 2

6 Oppgave 6: Bremses i bil

Bremselengden til en bil øker med hastigheten til bilen. En vanlig tommelfingerregel er at hastigheten v km/t gir en bremselengde på $0.5 \cdot (v/10)^2$ meter på sommerføre. Vi antar at bremselengden på sommerføre også kan påvirkes av andre faktorer. La derfor den stokastiske variabelen X representere bremselengden (i meter) til en bil som kjører i v km/t, og anta at X er normalfordelt med forventningsverdi $0.5 \cdot (v/10)^2$ og standardavvik $v/10$. Altså $X \sim N(0.5 \cdot (v/10)^2, v/10)$, der v er hastigheten til bilen (i km/t).

a) Hva er sannsynligheten for at en bil som kjører i 50 km/t har en bremselengde på maksimalt 10 meter?

Velg ett alternativ:

- ☐ 0.521
- ☐ 0.309
- ☐ 0.211
- ☐ 0.456
- ☐ 0.678
- ☐ 0.189

b) Hva er sannsynligheten for at en bil som kjører i 70 km/t trenger mer enn 30 meter på å stoppe?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.056
- ☐ 0.821
- ☐ 0.745
- ☐ 0.143
- ☐ 0.215
- ☐ 0.976

c) To biler kjører mot hverandre på en landevei. Den ene kjører i 70 km/t, den andre i 80 km/t. Sjåførene av bilene oppdager hverandre akkurat når det er 60 meters avstand mellom bilene, og bremses umiddelbart. Dersom begge bilene har bremselengde (i meter) beskrevet av normalfordeling som over ($N(0.5 \cdot (v/10)^2, v/10)$), der v er hastigheten til en bil målt i km/t), og bremselengdene er uavhengige, hva er sannsynligheten for at de unngår kollisjon?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.783
- ☐ 0.391
- ☐ 0.629
- ☐ 0.423
- ☐ 0.852
- ☐ 0.570

Bremseklosser i vanlige personbiler blir slitt som følge av bruk. Vi antar at levetiden (målt i tusen km) til bremseklossene i en vanlig personbil T er eksponensialfordelt med forventning 40 tusen km.

d) Hva er sannsynligheten for at bremseklossene varer i mellom 30 og 50 tusen km?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.590
- ☐ 0.331
- ☐ 0.186
- ☐ 0.472
- ☐ 0.618
- ☐ 0.287

Istedenfor å anta en eksponensialfordeling for levetiden til bremseklossene, er en Weibullfordeling mer passende. Vi antar nå at levetiden T er Weibull-fordelt med parametere $\lambda = 1/40$ og $\alpha = 5$. Dette gir en forventningsverdi på omtrent 37 tusen km.

e) Hva er nå sannsynligheten for at bremseklossene varer i mellom 30 og 50 tusen km?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.618
- ☐ 0.891
- ☐ 0.741
- ☐ 0.590
- ☐ 0.472
- ☐ 0.943

f) Vi antar også her at levetiden T (i tusen km) er Weibull-fordelt med parametere $\lambda = 1/40$ og $\alpha = 5$. Etter at et sett med bremseklosser har blitt brukt i 12 tusen km er bilen på service. Klossene blir ikke byttet. Hva er sannsynligheten for at bremseklossene varer i mellom 30 og 50 tusen km til?

Velg ett alternativ

- ☐ 0.561
- ☐ 0.280
- ☐ 0.697
- ☐ 0.470
- ☐ 0.376
- ☐ 0.126

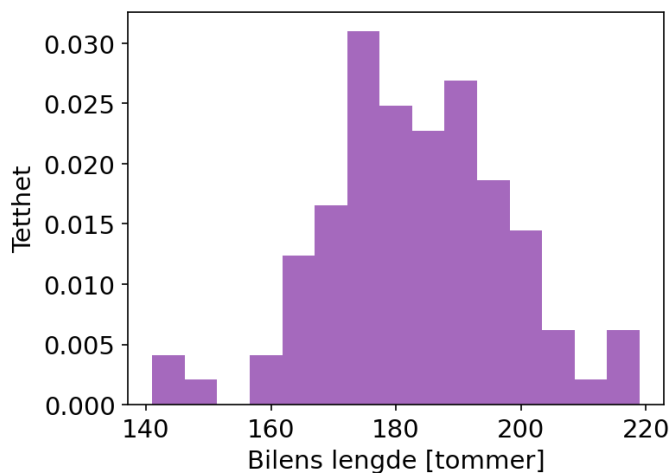
Maks poeng: 6

7 Oppgave 7: Regresjon

Det åpent tilgjengelige datasettet 93CARS inneholder informasjon om pris, bilmerke, modell, etc. for 93 tilfeldig valgte biler som ble produsert og solgt i USA i år 1993.

I denne oppgaven skal vi studere lengden på en bil (i tommer) og u-sving-diameter (i fot), og sammenhengen mellom dem.

Først ser vi kun på de observerte bil-lengdene $x_1, x_2, \dots, x_{93}$ (i tommer). Et histogram over observasjonene av bil-lengder er vist i figuren under.



Vi oppgir følgende oppsummeringstall (avrundet til nærmeste heltall):

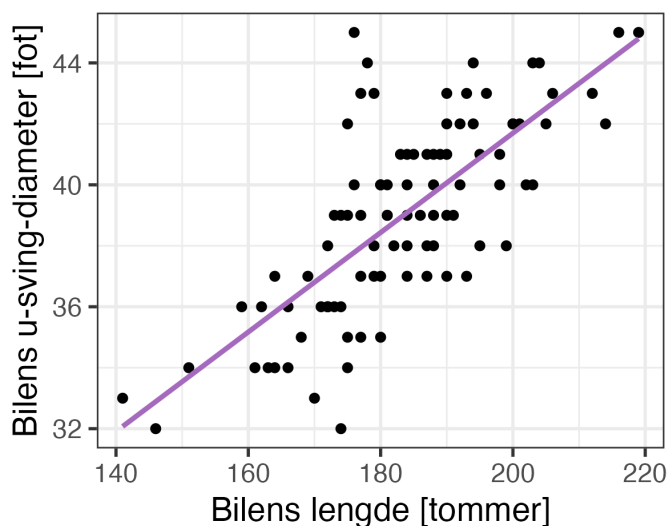
$$\sum_{i=1}^{93} x_i = 17038 \text{ og } \sum_{i=1}^{93} (x_i - \bar{x})^2 = 19617.$$

a) Hva blir gjennomsnitt $\bar{x}$ og empirisk standardavvik s for bilenes lengder (i tommer)?

Velg ett alternativ

- ☐ $\bar{x} = 183.2, s = 210.4$
- ☐ $\bar{x} = 185.7, s = 210.4$
- ☐ $\bar{x} = 185.7, s = 15.7$
- ☐ $\bar{x} = 183.2, s = 14.6$
- ☐ $\bar{x} = 183.2, s = 15.7$
- ☐ $\bar{x} = 185.7, s = 14.6$

Vi skal nå bruke billengdene som forklaringsvariabel (x) og u-sving-diameterene som responsvariabel (y) og utføre en enkel lineær regresjonsanalyse. Under er et kryssplott av dataene med tilhørende regresjonslinje:



Du kan bruke at (avrundet til nærmeste heltall) $\sum_{i=1}^{93} y_i = 3623$ og at det estimerte stigningstallet til regresjonslinja ($\hat{\beta}_1$) er 0.163.

b) Hva blir estimert skjæringspunkt med y-aksen ($\hat{\beta}_0$) til regresjonslinja?

Velg ett alternativ

- ☐ 32.783
- ☐ 10.976
- ☐ 9.610
- ☐ 33.184
- ☐ 31.091
- ☐ 9.095

c) Hvilket uttrykk tilsvare et 99%-konfidensintervall for stigningstallet?

Vi oppgir at $\sum_{i=1}^{93} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = 434$ (rundet av til nærmeste heltall).

Merk: En utvidet tabell for kritiske verdier i t-fordelingen finner du nederst på siden. Bruk, der det er mulig, 5 desimaler i mellomregninger.

Velg ett alternativ:

- ☐ [-0.074, 0.400]
- ☐ [0.122, 0.204]
- ☐ [-1.021, 1.347]
- ☐ [0.045, 0.281]
- ☐ [0.161, 0.165]
- ☐ [0.139, 0.187]

Tabell: Kritiske verdier i t-fordelingen, $P(T > t_{\alpha,v}) = \alpha$

v	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
90	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
91	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.631	3.182	3.401
92	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.630	3.181	3.399
93	0.846	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180	3.398
94	0.845	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179	3.397
95	0.845	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178	3.396
96	0.845	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177	3.395
97	0.845	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176	3.394
98	0.845	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.175	3.393
99	0.845	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175	3.392
100	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390

Maks poeng: 3