Løsningsforslag kontinuasjonseksamen ISTx100y

August 2024

Oppgave 1: Urnemodell

a)

Trekning uten tilbakelegging, ikke-ordnet utvalg, med $n = 10$ og $r = 3$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

b)

Her bruker vi at P(minst én ødelagt) = 1-P(ingen ødelagte).

Vi trekker 3 ganger, og er først ute etter sannsynligheten for å trekke et fungerende batterie i hvert av de tre trekkene. I første trekk er sannsynligheten 6/10, i andre er den 5/9 (fordi vi har trukket ett fungerende allerede) og i tredje trekk er det 4/8.

Dermed blir P(minst én ødelagt) = 1-P(ingen ødelagte) =

$$1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 0.83333333 \approx 0.833.$$

c)

Diskret uniformfordeling.

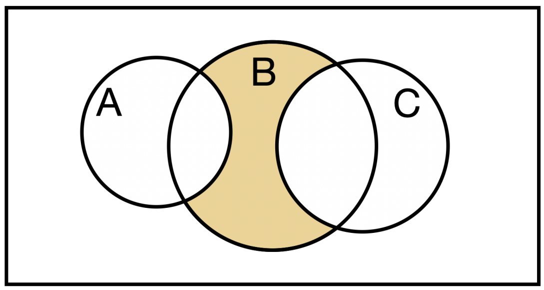
Oppgave 2: Hendelser og sannsynlighet

a)

Hendelsene A og B må være disjunkte siden $P(A)+P(B) = P(A \cup B)$. Dermed vil $P(A'|B) = 1$. Dersom vi vet at B har skjedd så kan ikke A skje, altså er det helt sikkert at komplementærhendelsen til A inntreffer.

b)

Sannsynligheten $P(B \cap A' \cap C')$ blir det fargede området i venndiagrammet under:



Vi kan dermed regne ut

$$P(B \cap A' \cap C') = P(B) - P(B \cap A) - P(B \cap C) = 0.30 - 0.05 - 0.10 = 0.15.$$

Oppgave 3:

a)

Fordelingen må integrere til 1:

$$\int_0^4 kx\,dx = k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = k\left(\frac{1}{2}4^2 - 0\right) = k \cdot 8 = 1$$

og dermed blir $k = 1/8 = 0.125$.

b)

$$E(Y) = \sum_y y \cdot P(Y = y) = 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.45 + 4 \cdot 0.3 = 3.05.$$

c)

Her kan vi f.eks. bruke formel fra formelarket (3.4): $\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$, og så må vi bruke at $\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/(\sigma_X\sigma_Y)$, som gir at $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cor}(X,Y)\mathrm{SD}(X)\mathrm{SD}(Y) = -0.45 \cdot 0.5 \cdot 0.8 = -0.18$. Dermed finner vi

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(2X_1 + X_2) &= 2^2 \cdot \mathrm{Var}(X_1) + 1^2 \cdot \mathrm{Var}(X_2) + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= 4 \cdot 0.5^2 + 1 \cdot 0.8^2 + 4 \cdot (-0.18) = 0.92.\end{aligned}$$

Oppgave 4: Poissonfordelingen

a)

$X \sim \text{Poisson}(3)$, da er

$$P(X > 5|X \leq 8) = \frac{P(5 < X \leq 8)}{P(X \leq 8)} = \frac{P(X \leq 8) - P(X \leq 5)}{P(X \leq 8)}.$$

Vi henter sannsynligheter fra tabell og finner

$$P(X > 5|X \leq 8) = \frac{0.9962 - 0.9161}{0.9962} = 0.08040554 \approx 0.08.$$

b)

Vi definerer $W = X + Y$ og har at $W \sim \text{Poisson}(8)$. Fra tabell finner vi

$$P(W \leq 7) = 0.453.$$

c)

Vi finner forventningsverdien til alle de seks uttrykkene:

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_1}{t_1} + \frac{X_2}{t_2} - \frac{X_3}{t_3}\right) = \frac{\lambda t_1}{t_1} + \frac{\lambda t_2}{t_2} - \frac{\lambda t_3}{t_3} = 2\lambda - \lambda = \lambda$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_1}{t_1}\right) = \frac{\lambda t_1}{t_1} = \lambda$$

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{X_i}{t_i}\right) = \frac{\lambda t_1}{t_1} + \frac{\lambda t_2}{t_2} + \frac{\lambda t_3}{t_3} = 3\lambda$$

$$\mathrm{E}\left(0.5 \cdot \left(\frac{X_1}{t_1} + \frac{X_2}{t_2}\right)\right) = 0.5 \cdot 2\lambda = \lambda$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_2}{t_1 + t_2}\right) = \frac{\lambda t_1 + \lambda t_2}{t_1 + t_2} = \lambda$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{3} X_i}{\sum_{i=1}^{3} t_i}\right) = \frac{\lambda t_1 + \lambda t_2 + \lambda t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \lambda$$

Det er dermed $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{X_i}{t_i}\right)$ som *ikke* er en forventningsrett estimator for λ.

Oppgave 5:

a)

Teststyrke er sannsynligheten for å forkaste H_0 når H_1 er sann. Vi forkaster dersom vi observerer $\bar{X} \leq 2.42$. Når H_1 er sann og $\mu = 2.5$ så er $\bar{X} \sim N(2.5, \sqrt{2/16})$. Da er teststyrken

$$P(\bar{X} \leq 2.42) = P\left(Z \leq \frac{2.42 - 2.5}{\sqrt{2/16}} = \Phi(-0.2262742) \approx \Phi(-0.23)\right) = 0.4090 \approx 0.41.$$

b)

For observasjonen $\bar{y} = 0.17$ finner vi $z_{\text{obs}} = \frac{0.17}{\sqrt{1/10}} \approx 0.538$. Testens p-verdi er sannsynligheten for det vi har observert eller noe høyere under antagelsen om at H_0 er sann. Arealet vi ser er $P(Z \geq z_{\text{obs}})$ når Z er standard normalfordelt. Dette tilsvarer testens p-verdi.

Oppgave 6:

a)

Her har vi at $X \sim N(12.5, 5)$. Dermed får vi:

$$P(X \leq 10) = P\left(\frac{X - 12.5}{5} \leq \frac{10 - 12.5}{5}\right) = P(Z \leq -0.5) = 0.3085 \approx 0.309.$$

b)

Her har vi at $X \sim N(24.5, 7)$, dermed:

$$\begin{aligned} P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P\left(\frac{X - 24.5}{7} \leq \frac{30 - 24.5}{7}\right) \\ = 1 - P(Z \leq 0.7857143) = 1 - P(Z \leq 0.79) = 1 - 0.7852 = 0.2148 \\ \approx 0.215. \end{aligned}$$

c)

Her har vi at $X_1 \sim N(24.5, 7)$ og $X_2 \sim N(32, 8)$. Vi er ute etter sannsynligheten for at den totale bremselengden for disse to skal være mindre enn 60 meter, altså $P(X_1 + X_2 \leq 60)$. En sum av uavhengige normalfordelte variabler er også normalfordelt; $X_1 + X_2 \sim N(24.5 + 32, \sqrt{7^2 + 8^2}) = N(56.5, 10.63015) \approx N(56.5, 10.630)$. Vi får:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 60) = P\left(\frac{(X_1 + X_2) - 56.5}{10.63} \leq \frac{60 - 56.5}{10.63}\right) \\ = P(Z \leq 0.3292568) \approx P(Z \leq 0.33) = 0.6293 \approx 0.630. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P(30 \le T \le 50) &= P(T \le 50) - P(T \le 30) \\
&= (1 - e^{-\lambda 50}) - (1 - e^{-\lambda 30}) \\
&= e^{-\lambda 30} - e^{-\lambda 50} \\
&= e^{-\frac{1}{40}\cdot 30} - e^{-\frac{1}{40}\cdot 50} = 0.1858618 \approx 0.186.
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
P(30 \le T \le 50) &= P(T \le 50) - P(T \le 30) \\
&= (1 - e^{-(\lambda 50)^\alpha}) - (1 - e^{-(\lambda 30)^\alpha}) \\
&= e^{-(\lambda 30)^\alpha} - e^{-(\lambda 50)^\alpha} \\
&= e^{-(\frac{1}{40}\cdot 30)^5} - e^{-(\frac{1}{40}\cdot 50)^5} = 0.7414752 \approx 0.741.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
P(30 + 12 \le T \le 50 + 12 | T > 12) &= \frac{P(42 \le T \le 62 \cap T > 12)}{P(T > 12)} \\
&= \frac{P(42 \le T \le 62)}{1 - P(T \le 12)} = \frac{P(T \le 62) - P(T \le 42)}{1 - P(T \le 12)} \\
&= \frac{(1 - e^{-(\lambda 62)^\alpha}) - (1 - e^{-(\lambda 42)^\alpha})}{1 - (1 - e^{-(\lambda 12)^\alpha})} = \frac{e^{-(\lambda 42)^\alpha} - e^{-(\lambda 62)^\alpha}}{e^{-(\lambda 12)^\alpha}} \\
&= \frac{e^{-(\frac{1}{40}\cdot 42)^5} - e^{-(\frac{1}{40}\cdot 62)^5}}{e^{-(\frac{1}{40}\cdot 12)^5}} \\
&= 0.2796216 \approx 0.280.
\end{aligned}$$

Oppgave 7:

a)

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{17038}{93} = 183.2043 \approx 183.2. \\
s &= \sqrt{19617/92} = 14.60238 \approx 14.6.
\end{aligned}$$

b)

Fra formelark:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \frac{3623}{93} - 0.163 \frac{17038}{93} = 9.094688 \approx 9.095.$$

Merk: dersom man har feil svar i oppgave a) så vil svaret her bli 8.689 og det riktige alternativet er det nærmeste.

c)

Konfidensintervallet er gitt ved:

$$\left[\hat{\beta}_1 - t_{\alpha/2,n-2} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\beta}_1), \hat{\beta}_1 + t_{\alpha/2,n-2} \cdot \mathrm{SE}(\hat{\beta}_1)\right]$$

Her trenger vi først å regne ut et estimat for standardavviket til regresjonen, og så til $\hat{\beta}_1$. Formelarket gir:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{93} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = 434/91 = 4.769231 \approx 4.76923$$

og dermed får vi følgende standardfeil for stigningstallet:

$$\mathrm{SE}(\hat{\beta}_1) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^{93} (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{\sqrt{4.76923}}{\sqrt{19617}} = 0.01559222 \approx 0.01559$$

Vi skal ha et 99%-konfidensintervall, så $\alpha = 0.01$ og vi har $n = 93$, så $t_{\alpha/2,n-2} = t_{0.005,91} = 2.631$. Med den oppgitte verdien for $\hat{\beta}_1 = 0.163$ får vi til slutt:

$$[0.163 - 2.631 \cdot 0.01559, 0.163 + 2.631 \cdot 0.01559] = [0.1219827, 0.2040173] \approx [0.122, 0.204] .$$