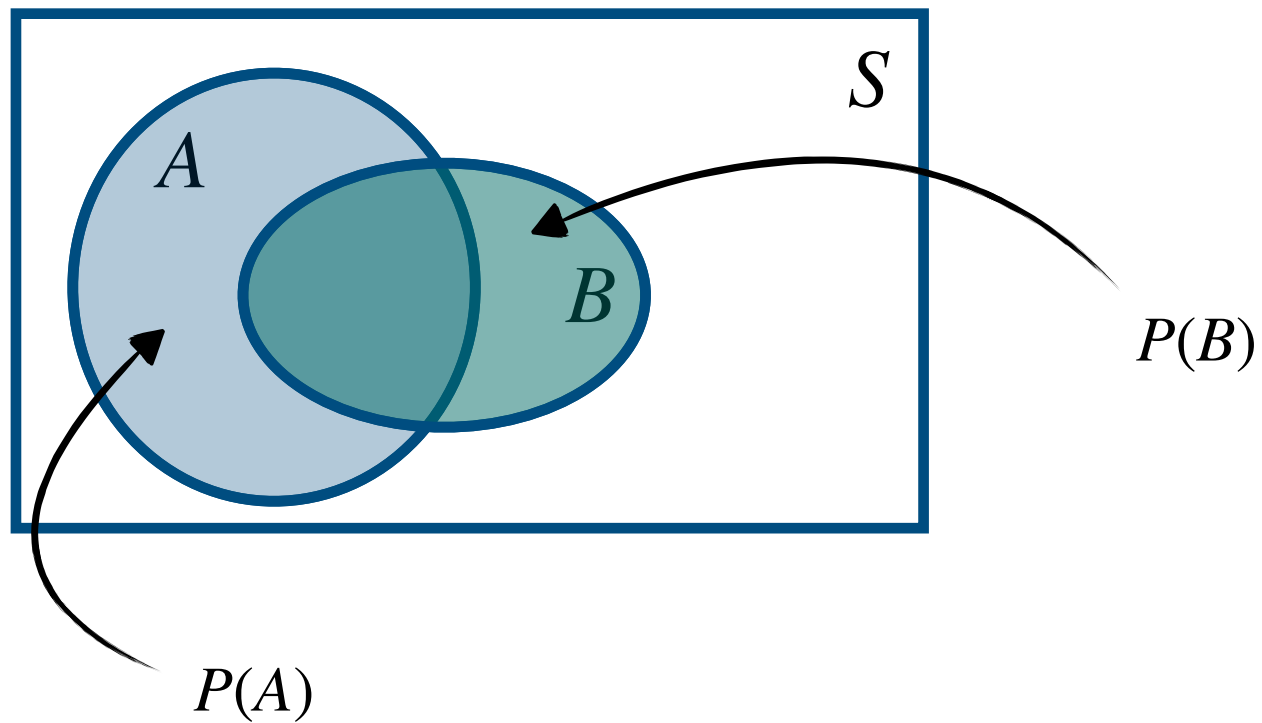


Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

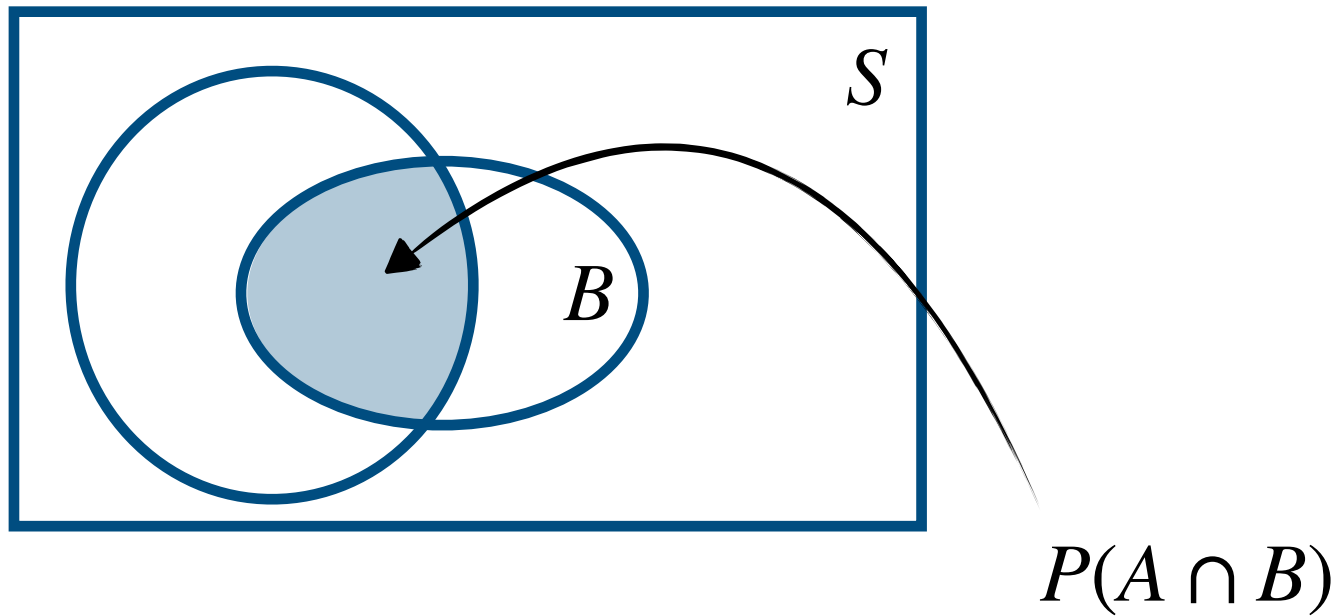
Repetisjon: Sannsynlighet for hendelser

Totalt areal: $P(S) = 1$



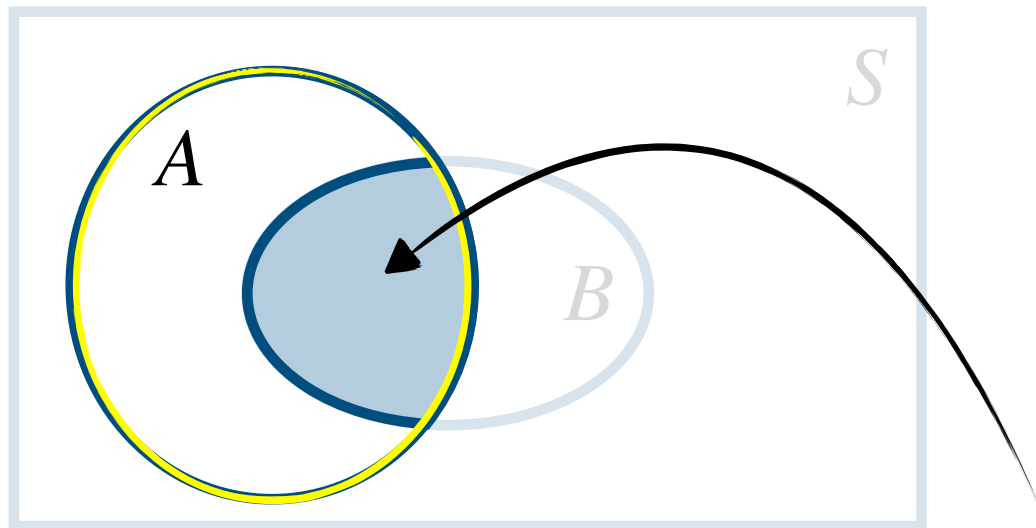
Betinget sannsynlighet

Vi vet at A har skjedd. Hva er sannsynligheten for at B inntreffer?



Betinget sannsynlighet

Vi vet at A har skjedd. Hva er sannsynligheten for at B inntreffer?



$P(A \cap B)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

“betinget på”

“gitt at”

Sannsynligheten for at A og B inntreffer samtidig...

... relativt til arealet av det innskrenkede utfallsrommet

Eksempel



En familie har to barn. Gitt at minst ett av barna er gutt, hva er sannsynligheten for at begge er gutter?

~~50%~~?
33%

Ingen informasjon
om rekkefølgen!

$S = \{\text{gutt-gutt, gutt-jente, jente-gutt, jente-jente}\}$

Antagelse: Alle enkeltutfall er like sannsynlige

S		
gutt-gutt	gutt-jente	
jente-gutt	jente-jente	

A: Minst ett av barna er gutt

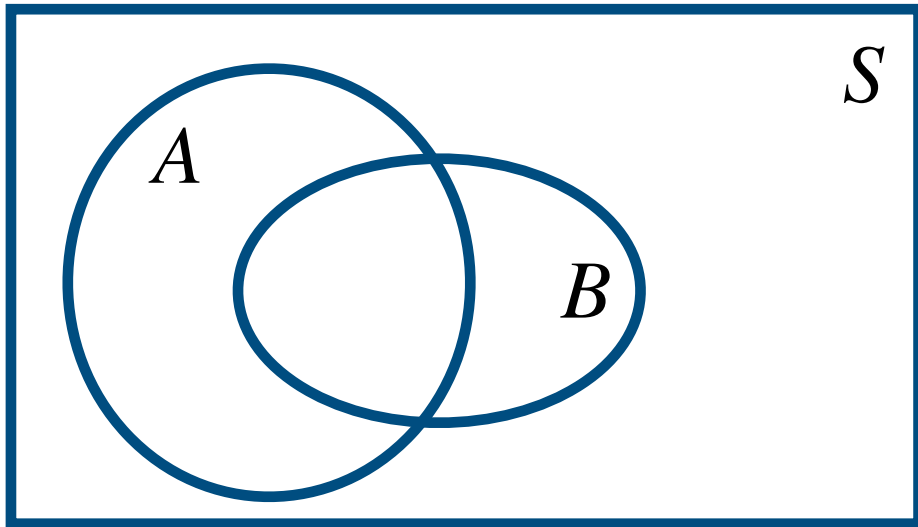
$$p(A) = \frac{3}{4}$$

B: Begge er gutter

$$p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Multiplikasjonsregelen og Bayes regel



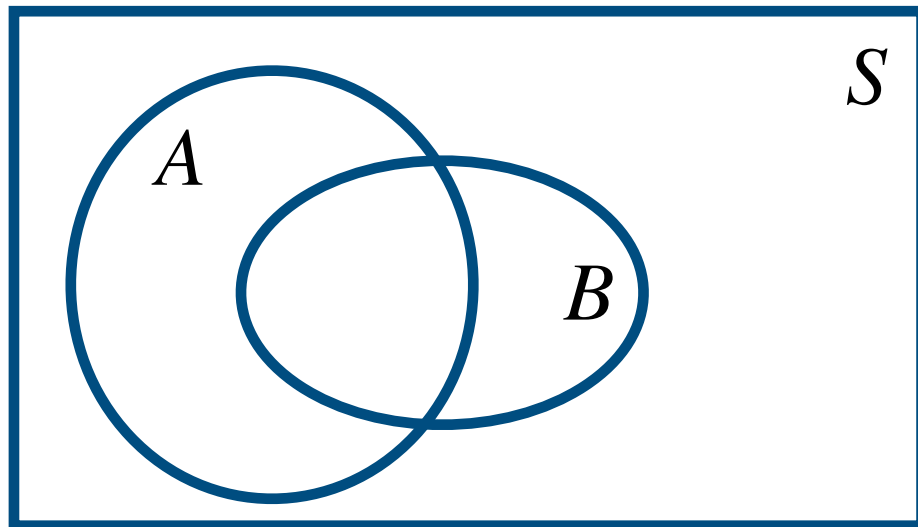
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad | \quad \cdot P(A) \quad P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Multiplikasjonsregelen

*Velg det uttrykket som
passer til din situasjon!*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad | \quad \cdot P(B) \quad P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Multiplikasjonsregelen og Bayes regel



$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$

Multiplikasjonsregelen

*Velg det uttrykket som
passer til din situasjon!*

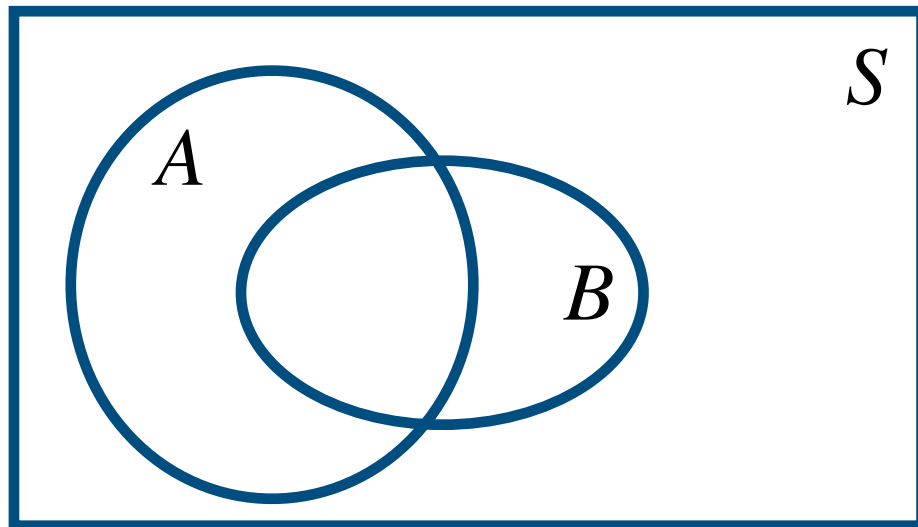
$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

Bayes regel

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}$$

Multiplikasjonsregelen og Bayes regel



$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(B | A)P(A)$$

Multiplikasjonsregelen

*Velg det uttrykket som
passer til din situasjon!*

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

Bayes regel

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}$$

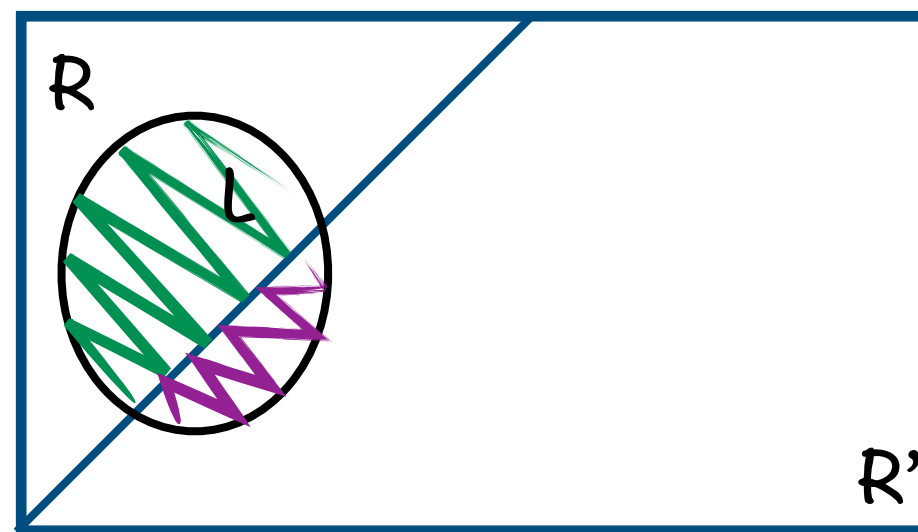
Motivasjon: Setningen om total sannsynlighet

I en voksen befolkning er det 25% som røyker. Sannsynligheten for å utvikle en lungesykdom er 0.6 blant røykere og 0.1 blant ikke-røykere.



Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt person har lungesykdom?

$$\begin{aligned}P(L \cap R) &= P(L | R) P(R) \\&= 0,6 \cdot 0,25 \\&= 0,15\end{aligned}$$



S ← Alle personer i befolkningen

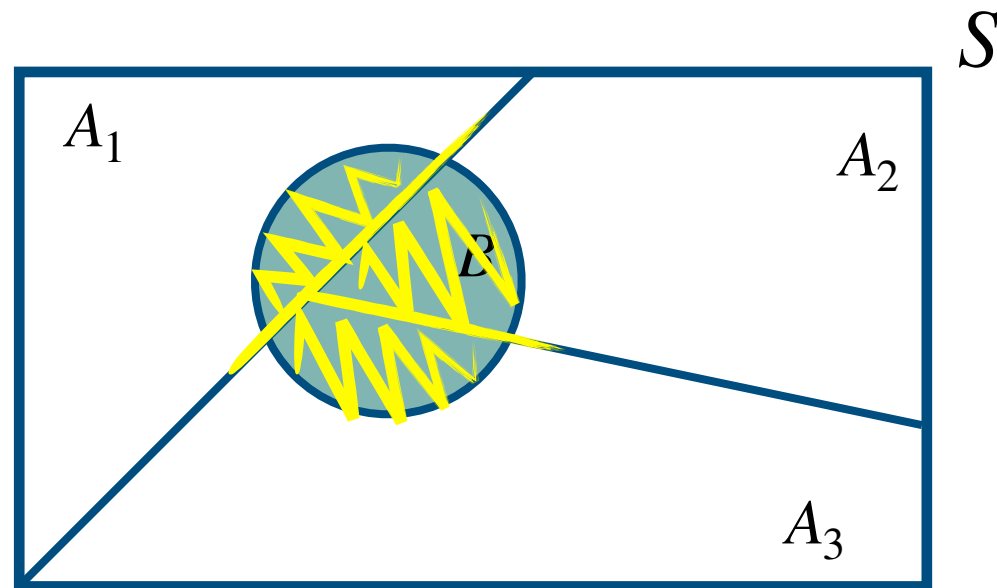
R: Røyker R': Ikke-røyker

L: Lungesykdom

$$\begin{aligned}P(L \cap R') &= P(L | R') P(R') \\&= 0,1 \cdot 0,75 \\&= 0,075\end{aligned}$$

$$P(L) = P(L \cap R) + P(L \cap R') = 0,15 + 0,075 = 0,225$$

Setningen om total sannsynlighet



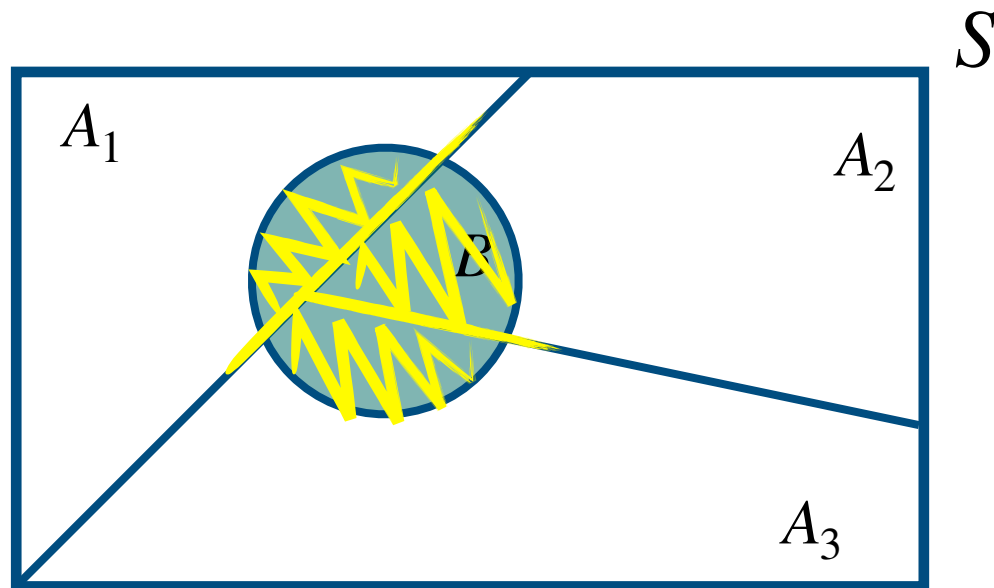
$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

Multiplikasjonsregelen

$$= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)$$

A_1, A_2, A_3 danner en partisjon av utfallsrommet

Setningen om total sannsynlighet



$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

Multiplikasjonsregelen

$$= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)$$

Setningen om total sannsynlighet

Dersom $A_1, A_2, \dots, A_n$ danner en partisjon av utfallsrommet, så er

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + \dots + P(B | A_n)P(A_n)$$

Bayes regel (igjen)

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Motivasjon: Uavhengige hendelser

Eks: Myntkast



Mynt



Kron

Kast mynt 2 ganger: Gitt at du fikk mynt i første kast, hva er sannsynligheten for at du får kron i andre kast?

$S = \{\text{mynt-mynt}, \text{mynt-kron}, \text{kron-mynt}, \text{kron-kron}\}$

Uniform sannsynlighetsmodell!

A: Mynt i første kast B: Kron i andre kast

$$p(A) = \frac{2}{4} = 0,5 \quad p(B) = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,25}{0,5} = 0,5 = p(B)$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Uavhengige hendelser

A og B er uavhengige hendelser dersom

$$P(B | A) = P(B) \quad \text{og} \quad P(A | B) = P(A)$$

Multiplikasjonsregelen $P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Multiplikasjonsregelen for to uavhengige hendelser

Uavhengighetsbetingelse!

Obs: Dersom A, B og C er uavhengige hendelser, så er

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Merk: Uavhengighet er ikke noe vi kan se i et venndiagram!