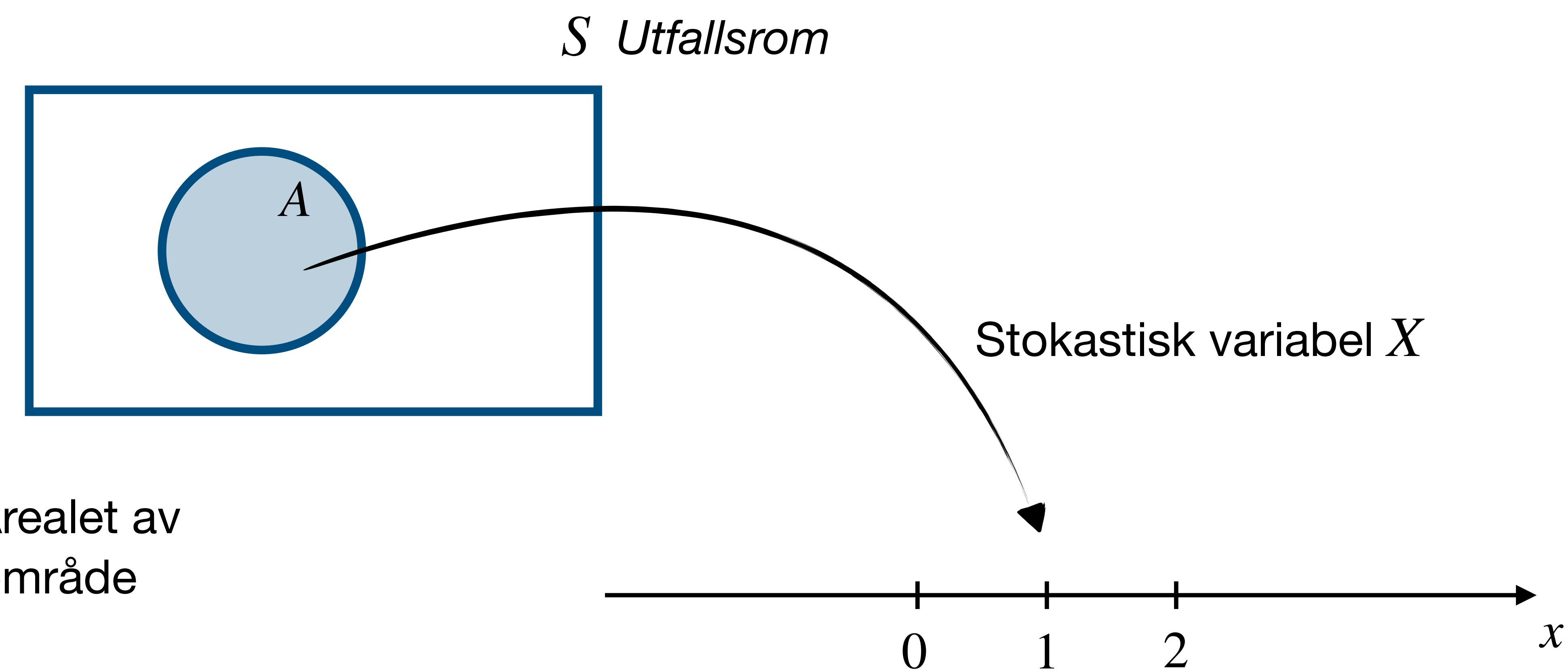
Stokastiske variabler

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Motivasjon: Stokastisk variabel

Stokastisk forsøk

- ulike enkeltutfall kan inntreffe og,
- på forhånd kan vi ikke være helt sikre på utfallet



$P(A) =$ Arealet av skravert område

$P(X = 1)$

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel gir en **tallverdi** til hvert enkeltutfall av et stokastisk forsøk

Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen

$X = 2$

Stokastisk variabel

En stokastisk variabel gir en **tallverdi** til hvert enkeltutfall av et stokastisk forsøk

Notasjon: X, Y, Z

Eksempel: Fotballkamp

0-0, 1-0, 0-1, 2-0, 2-1, ...

$X = 2$

$Y = 1$

X : teller antall mål til hjemmelaget

Y : målforskjell (*hjemme - borte*)

Diskret stokastisk variabel

En stokastisk variabel gir en **tallverdi** til hvert enkeltutfall av et stokastisk forsøk

Notasjon: X, Y, Z

En **diskret** stokastisk variabel X kan ta diskrete tallverdier

Øyne på terning

$V_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Verdimengde

Målforskjell

$V_x = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Diskret sannsynlighetsfordeling

Sannsynlighetsfordelingen til en diskret stokastisk variabel X beskrives av **punktsannsynligheter** $P(X = x)$

Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen

x	$P(X = x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$x \in V_x$

$$\sum_{x \in V_x} P(X = x) = 1$$

Merk: For en tallverdi x utenfor verdimengden V_x er alltid $P(X = x) = 0$

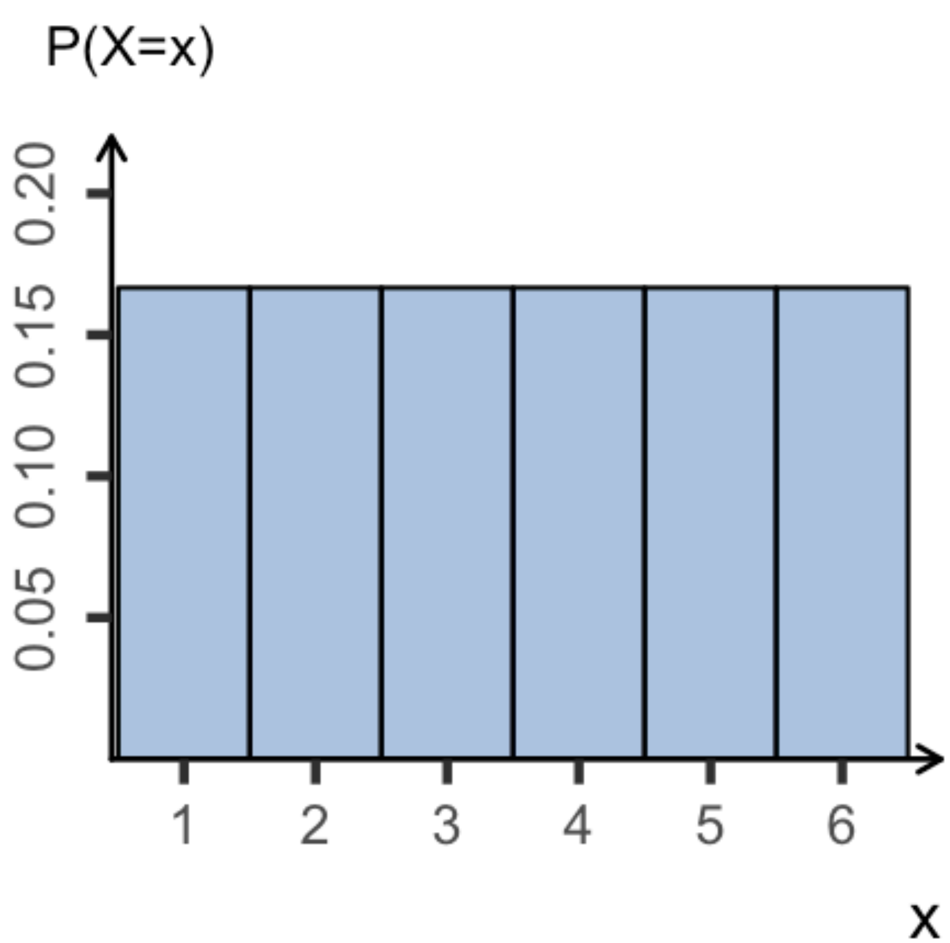
Diskret sannsynlighetsfordeling

Sannsynlighetsfordelingen til en diskret stokastisk variabel X beskrives av **punktsannsynligheter** $P(X = x)$

Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen



$$\sum_{x \in V_x} P(X = x) = 1$$

Diskret sannsynlighetsfordeling

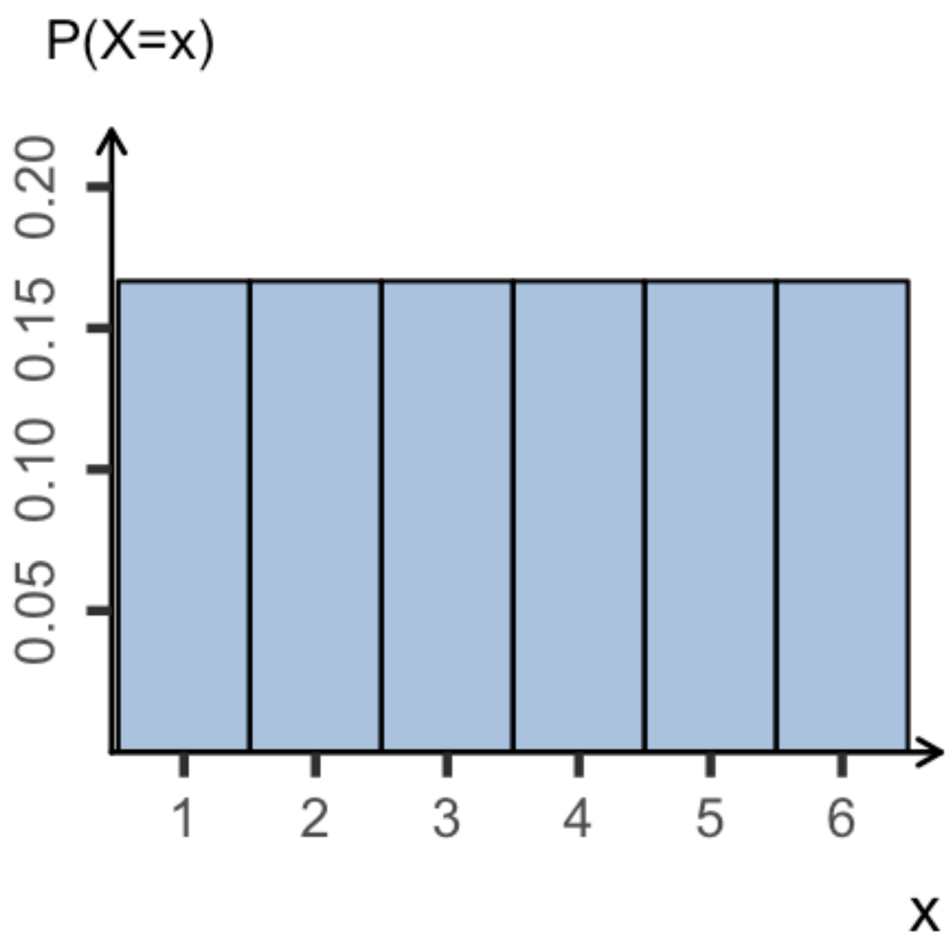
Sannsynlighetsfordelingen til en diskret stokastisk variabel X beskrives av **punktsannsynligheter** $P(X = x)$

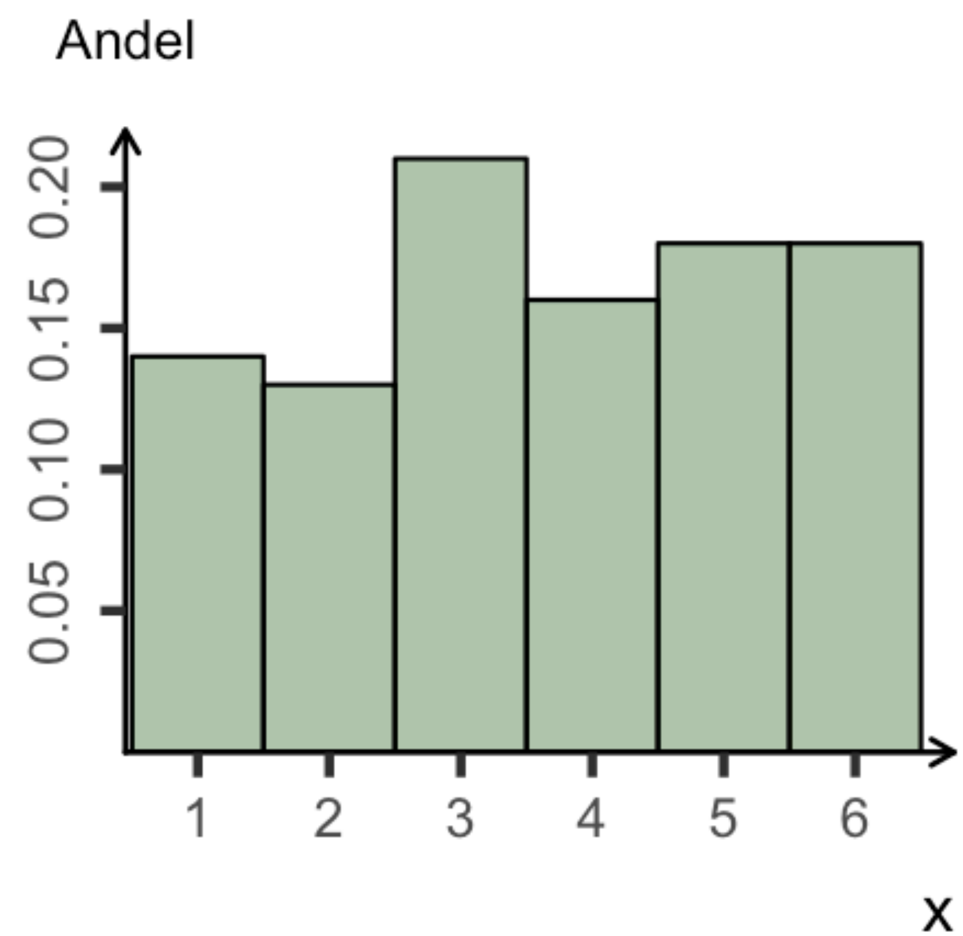
Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen

100 terningkast





Diskret sannsynlighetsfordeling

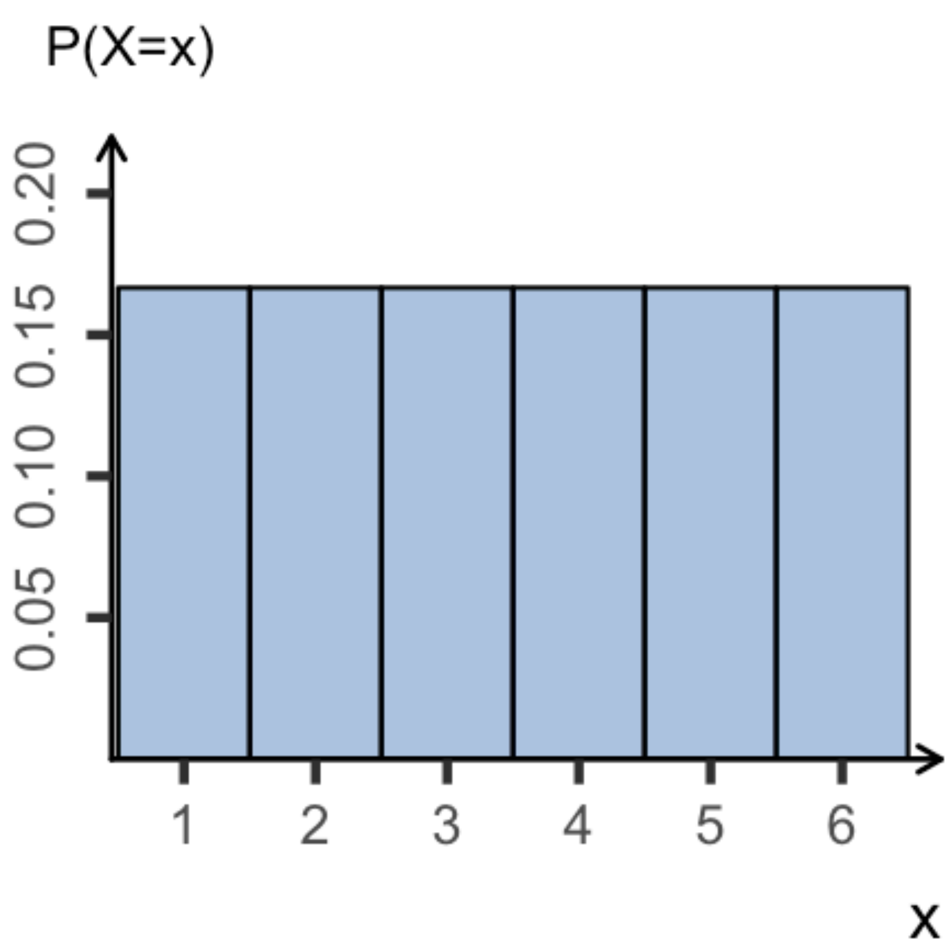
Sannsynlighetsfordelingen til en diskret stokastisk variabel X beskrives av **punktsannsynligheter** $P(X = x)$

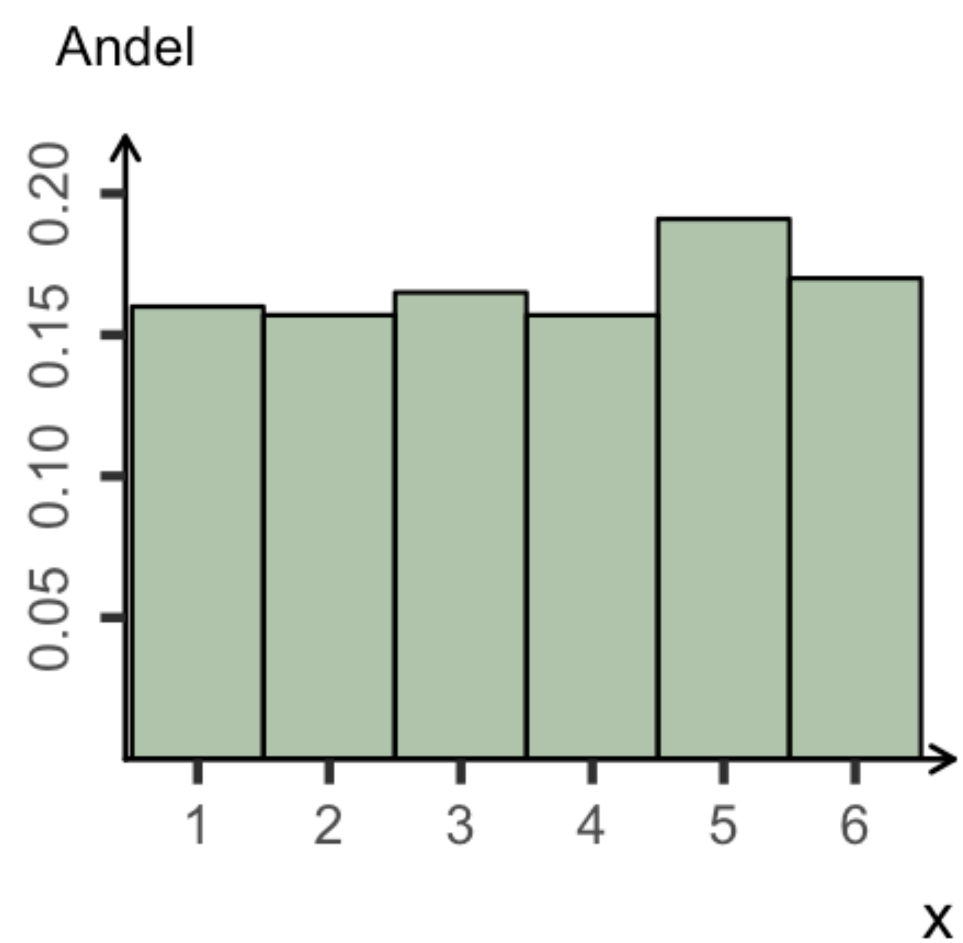
Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen

1000 terningkast





Diskret sannsynlighetsfordeling

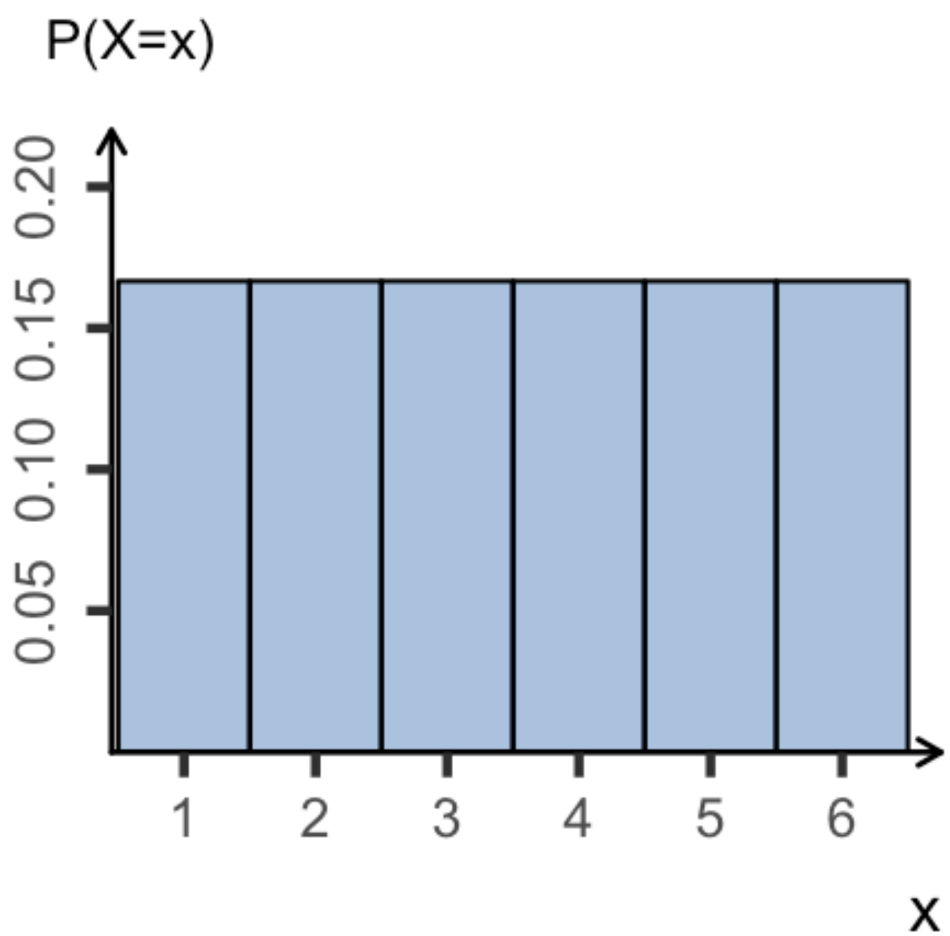
Sannsynlighetsfordelingen til en diskret stokastisk variabel X beskrives av **punktsannsynligheter** $P(X = x)$

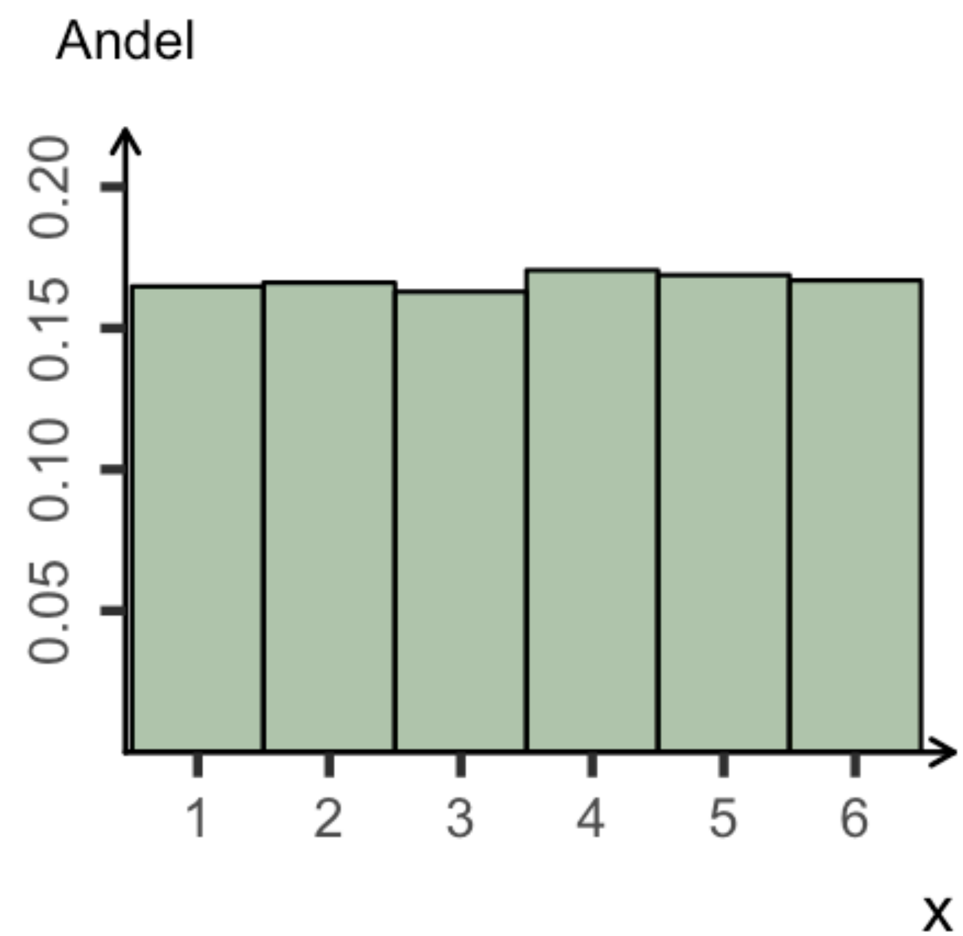
Eksempel: Terningkast

Mulige utfall: '1-er', '2-er', '3-er', '4-er', '5-er', '6-er'

X : teller antall øyne på terningen

10.000 terningkast

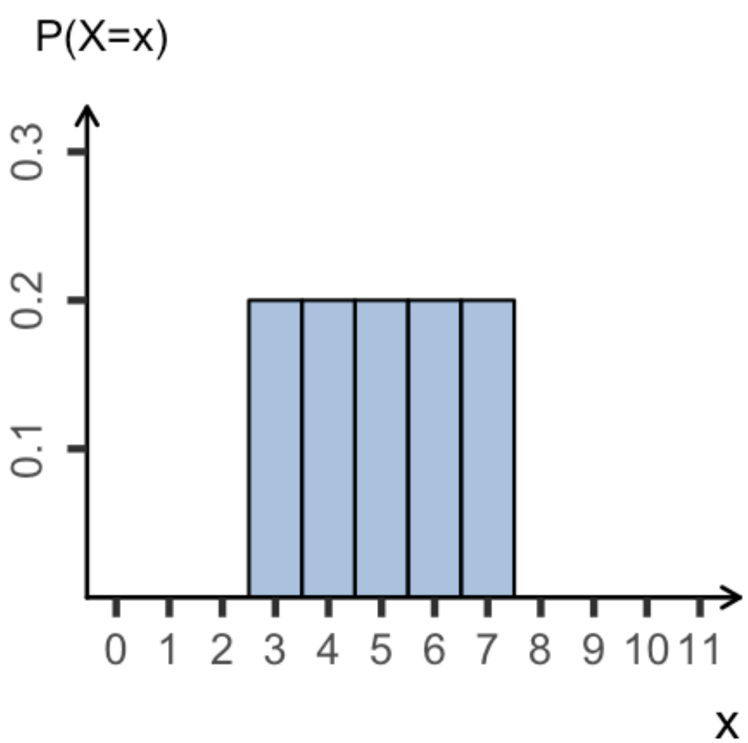




Kjente diskrete sannsynlighetsfordelinger

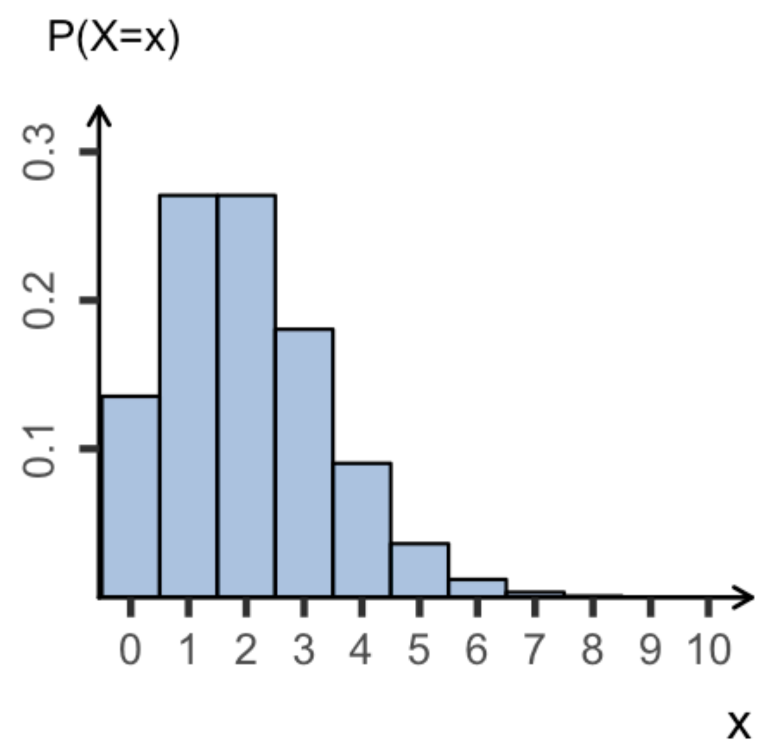
Uniformfordeling

Eks:



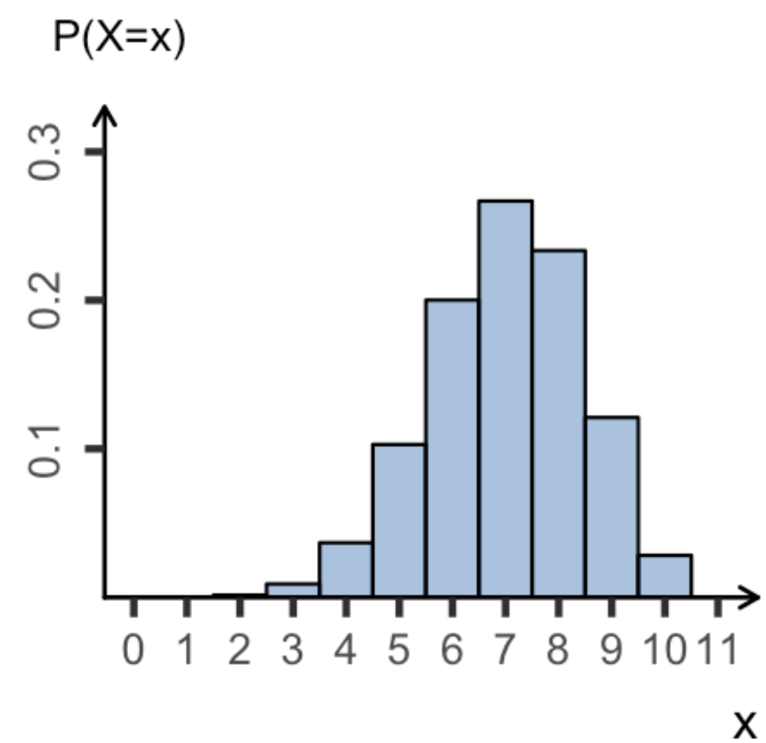
Binomisk fordeling

Eks:



Poissonfordeling

Eks:



Kontinuerlig stokastisk variabel

En stokastisk variabel gir en **tallverdi** til hvert enkeltutfall av et stokastisk forsøk

Notasjon: X, Y, Z

En **kontinuerlig** stokastisk variabel kan ta alle tallverdier på tallinja, eller i et intervall

Snødybde

$V_x = [0, \infty)$

Verdimengde

Temperatur

$V_Y = (-\infty, \infty)$

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

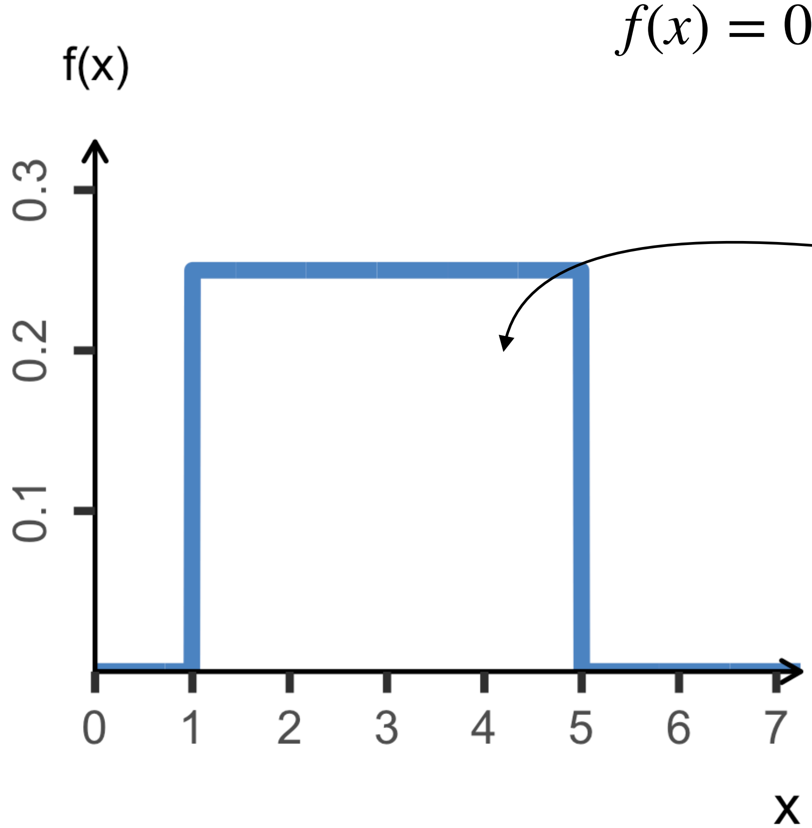
Eks: Kontinuerlig uniformfordeling

X er kontinuerlig uniformfordelt på intervallet [1, 5]

$$V_x = [1, 5] \qquad f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} \text{ for alle } x \in V_x$$

$$f(x) = 0 \text{ for alle } x \notin V_x$$

? Men hvordan regner vi på sannsynligheter?



Areal = 1

$$\int_{x \in V_x} f(x)\, dx = 1$$

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

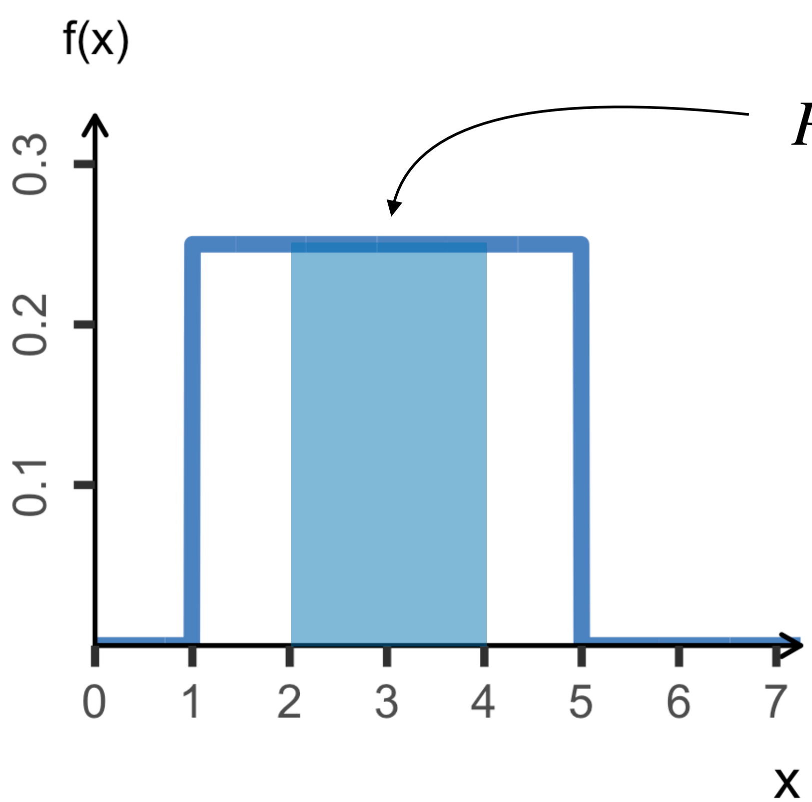
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

Eks: Kontinuerlig uniformfordeling

X er kontinuerlig uniformfordelt på intervallet [1, 5]

$V_x = [1, 5]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ for alle $x \in V_x$

Men hvordan regner vi på sannsynligheter?



$$P(2 \leq X \leq 4)$$

$$= \int_2^4 f(x)\,dx = 0.5$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Hva med punkt-sannsynligheter?

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

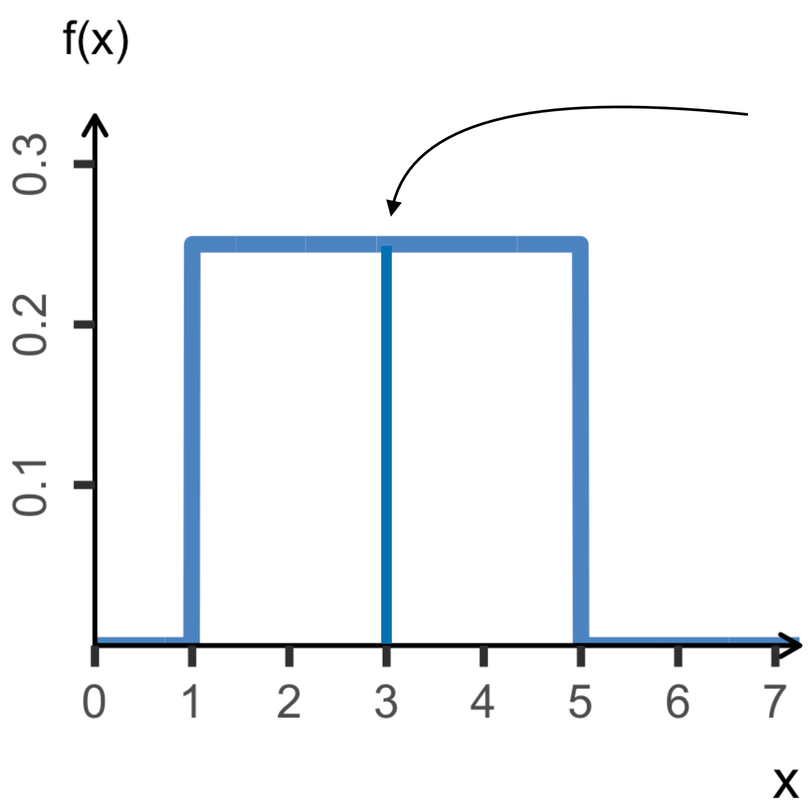
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

Eks: Kontinuerlig uniformfordeling

X er kontinuerlig uniformfordelt på intervallet [1, 5]

$V_x = [1, 5]$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$ for alle $x \in V_x$

? Men hvordan regner vi på sannsynligheter?



$$P(X = 3) = \int_3^3 f(x)\,dx = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

? Hva med punkt-sannsynligheter?

$$P(X = x) = 0$$

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

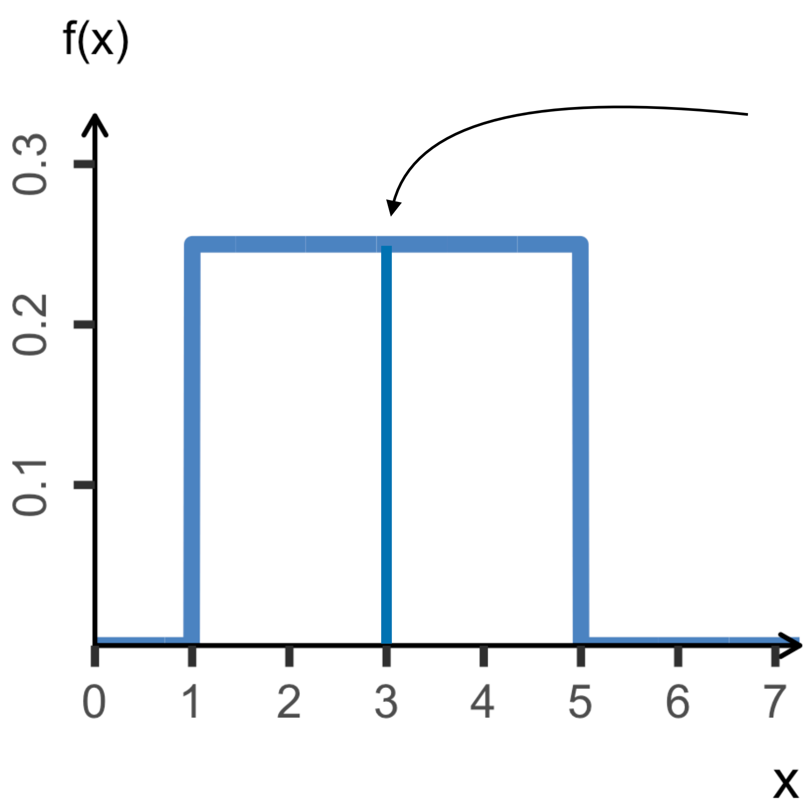
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

Eks: Kontinuerlig uniformfordeling

X er kontinuerlig uniformfordelt på intervallet [1, 5]

$V_x = [1, 5]$ $\quad f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ for alle $x \in V_x$

? Men hvordan regner vi på sannsynligheter?



$$P(X = 3) = \int_3^3 f(x)\,dx = 0$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

? Hva med punkt-sannsynligheter?

$$P(X = x) = 0$$

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

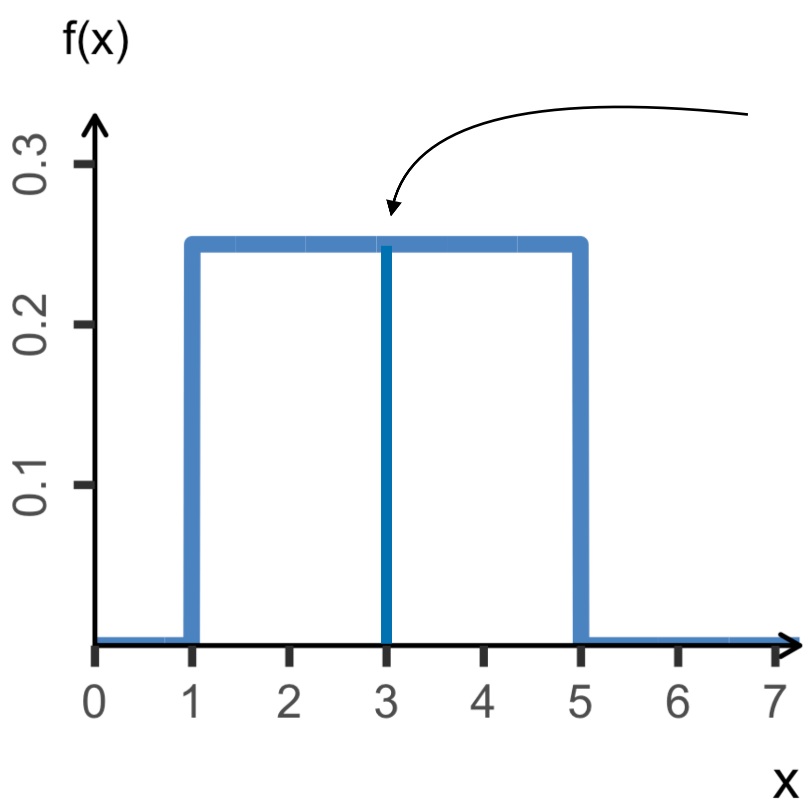
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

Eks: Kontinuerlig uniformfordeling

X er kontinuerlig uniformfordelt på intervallet [1, 5]

$V_x = [1, 5]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ for alle $x \in V_x$

? Men hvordan regner vi på sannsynligheter?



$$P(X = 3) = \int_3^3 f(x)\,dx = 0$$

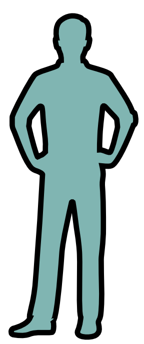
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

? Hva med punkt-sannsynligheter?

$$P(X = x) = 0$$

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

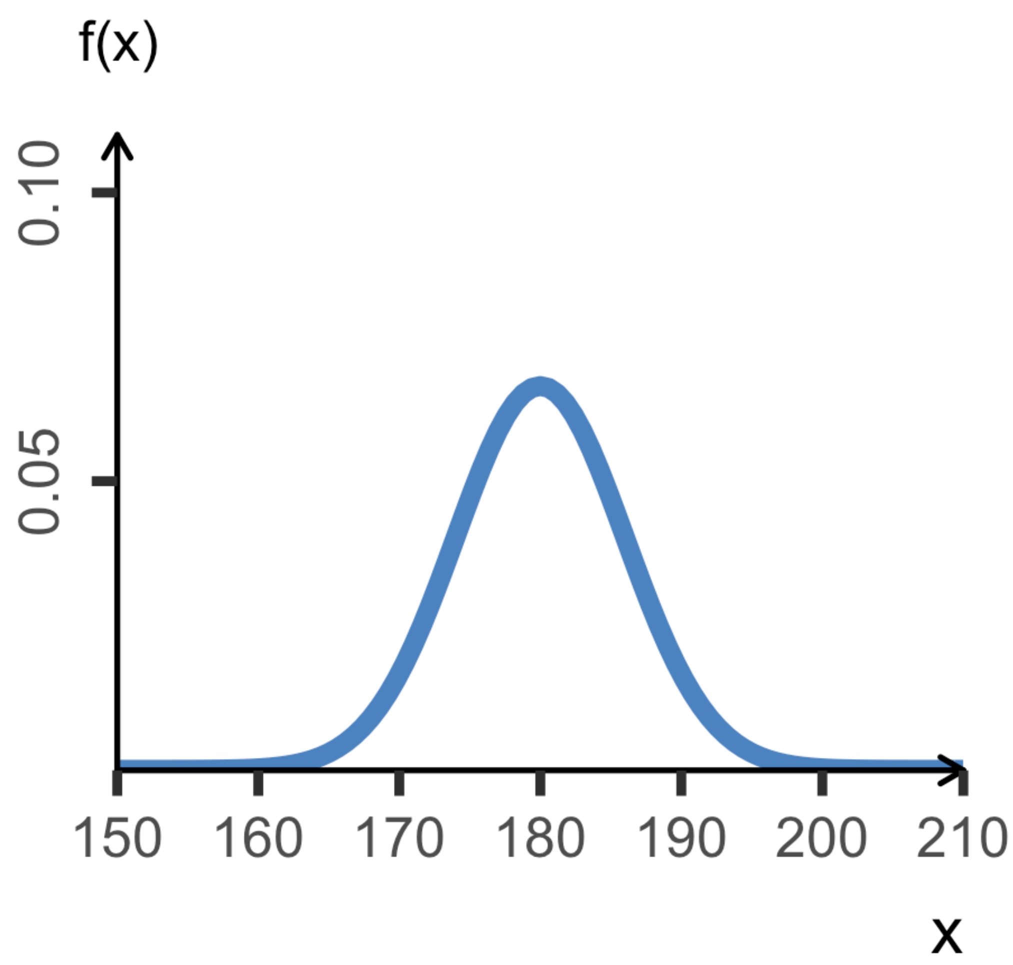
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

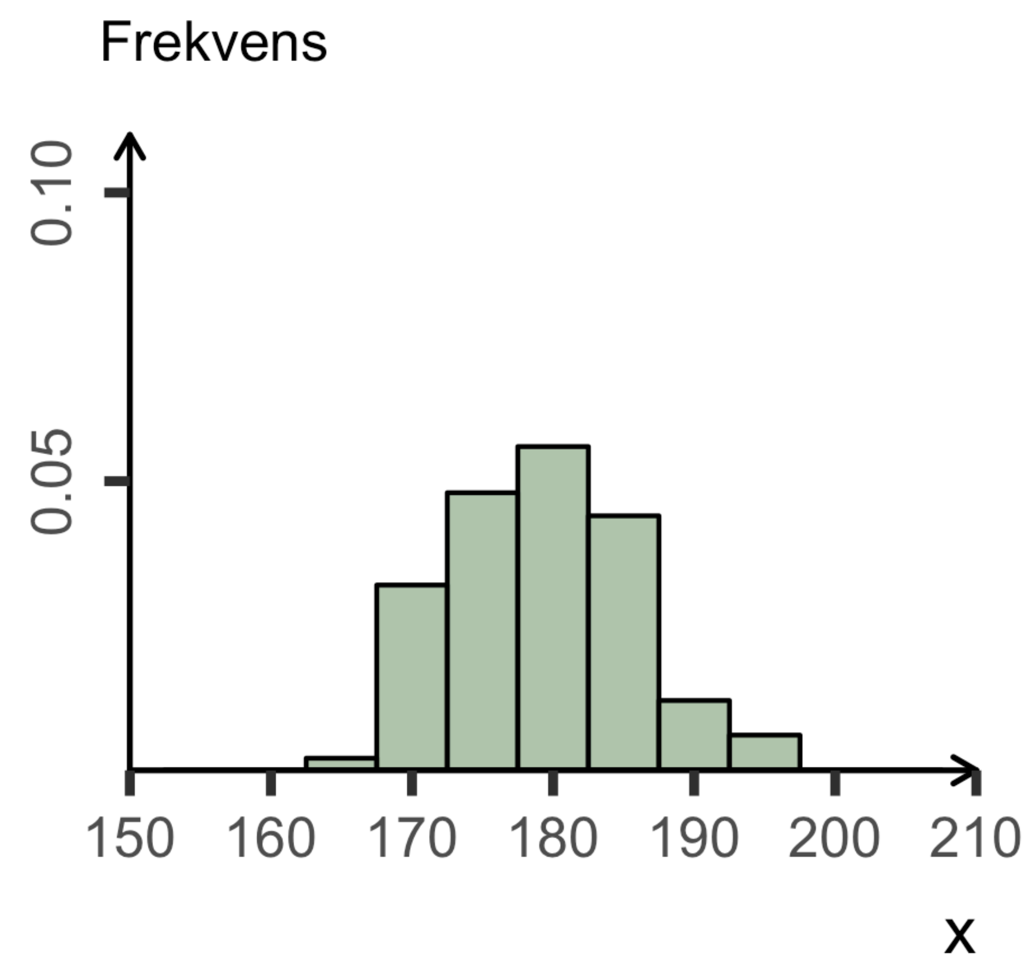


Eks:

X: Høyde [cm] til tilfeldig valgt mann

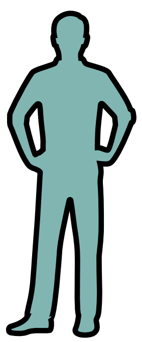
100 personer





Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

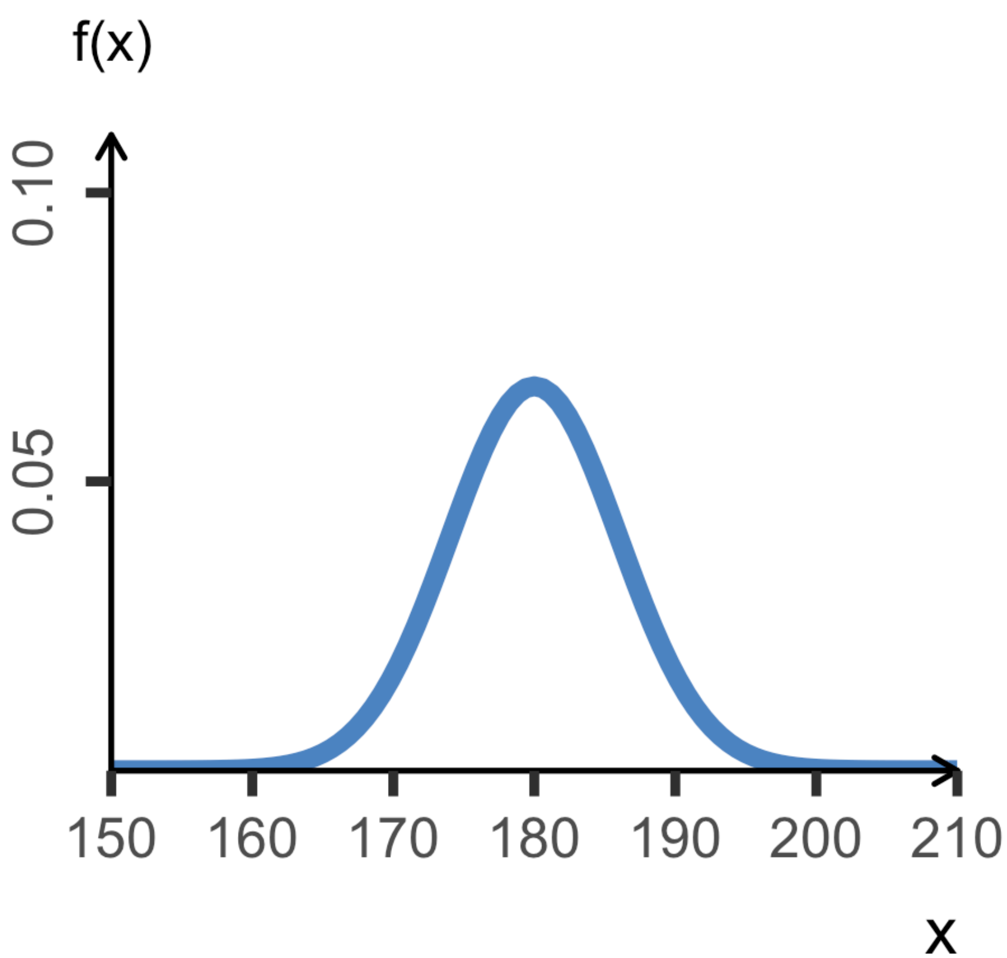
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

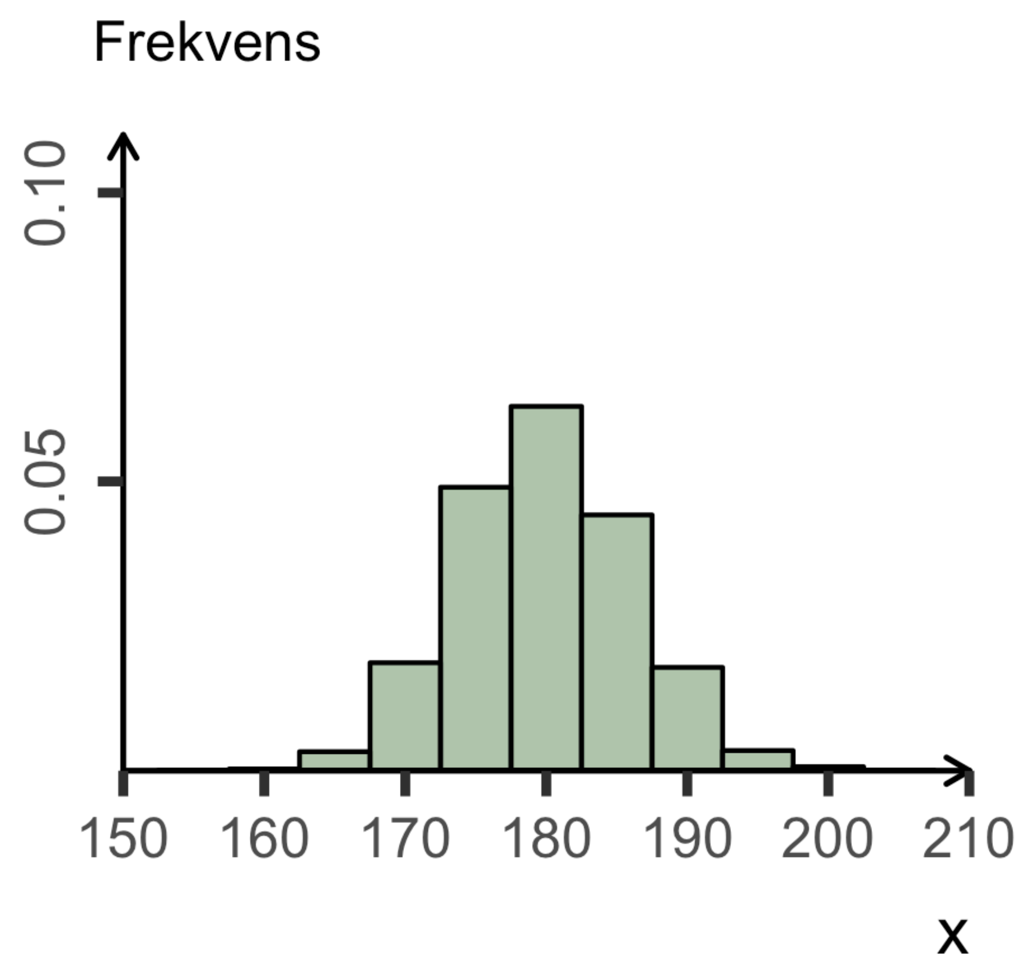


Eks:

X: Høyde [cm] til tilfeldig valgt mann

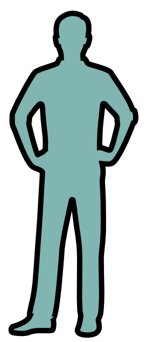
1000 personer





Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

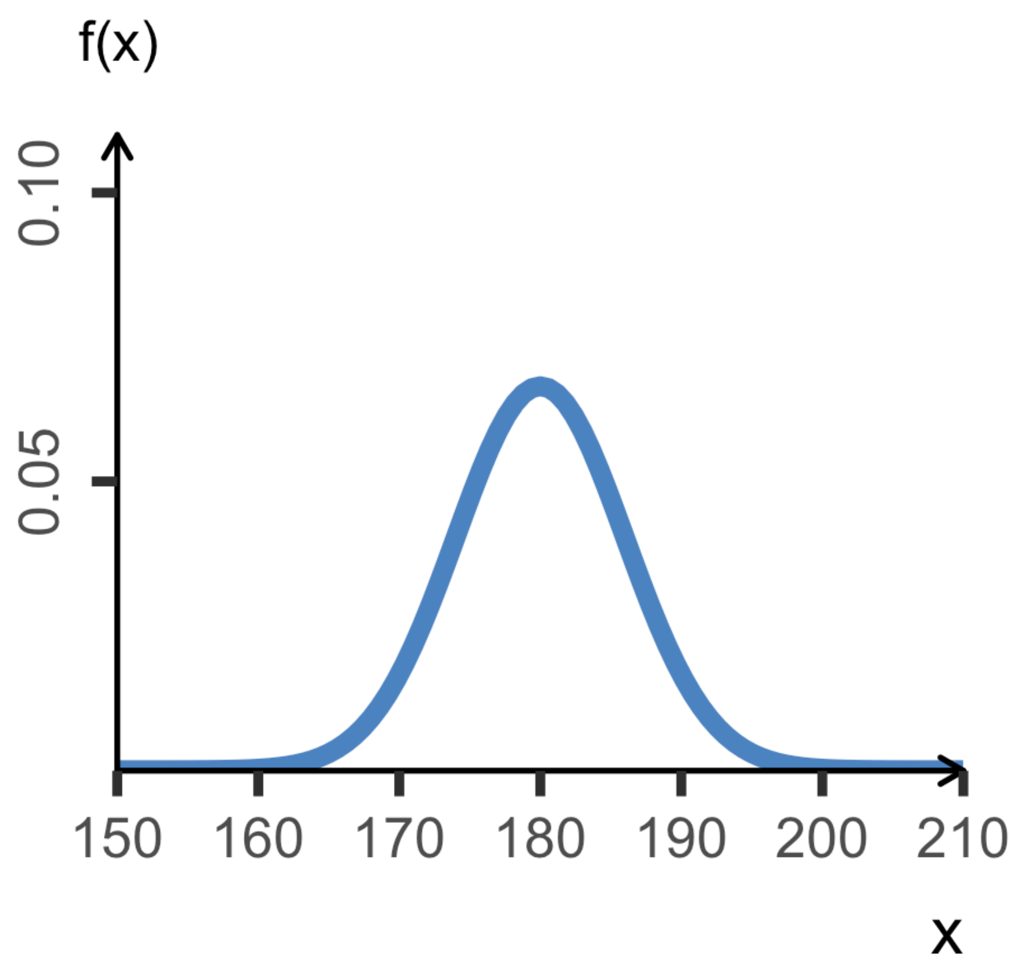
Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

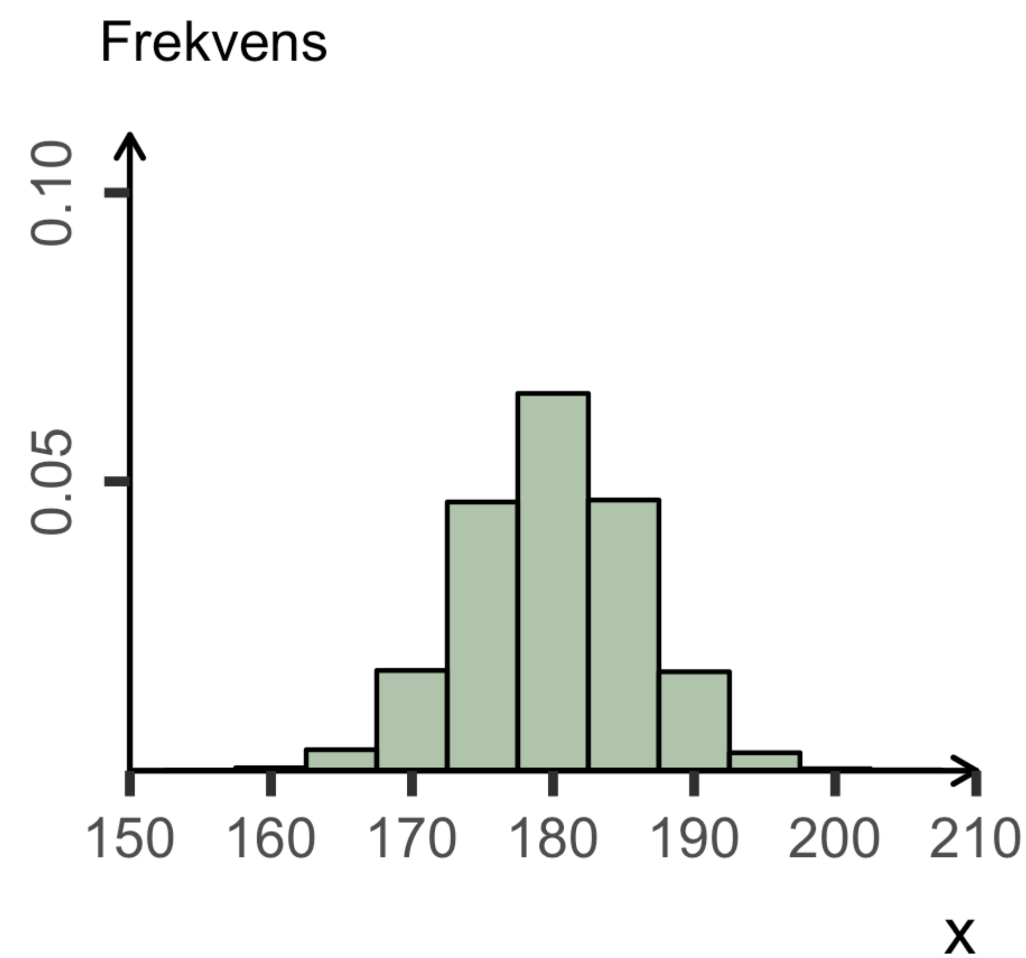


Eks:

X: Høyde [cm] til tilfeldig valgt mann

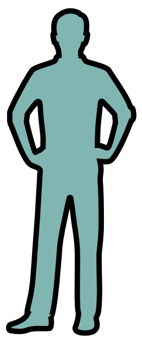
10.000 personer





Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling

Sannsynlighetsfordelingen til en kontinuerlig stokastisk variabel X beskrives av en **sannsynlighetstetthet** $f(x)$

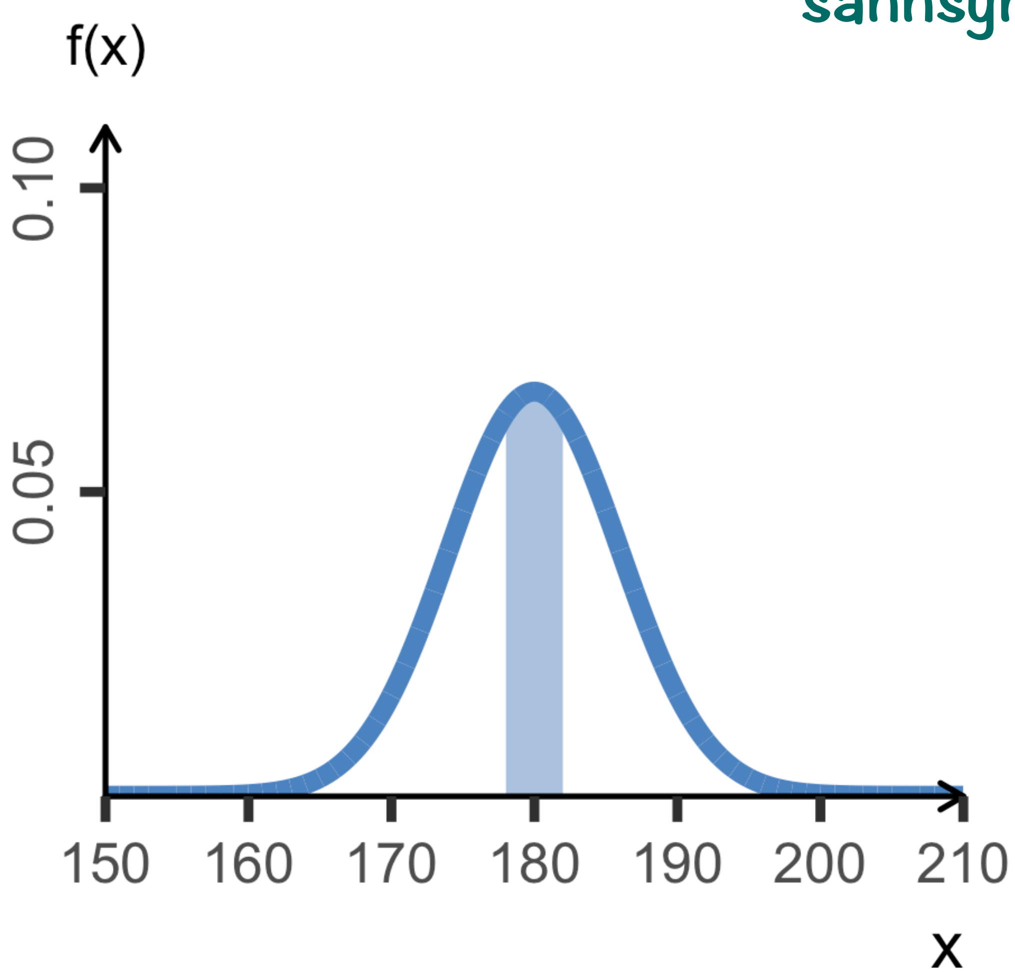


Eks:

X: Høyde [cm] til tilfeldig valgt mann

omtrent

"sannsynligheten for å møte en person som er 180 cm høy"



$P(X = 180) = 0$???

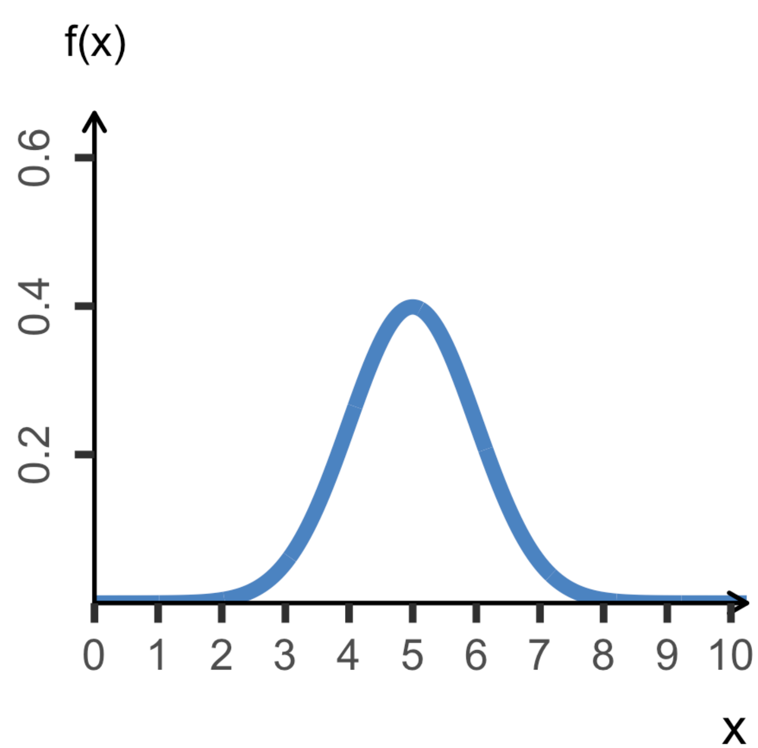
$P(179.5 < X \leq 180.5) = 0.07$

$P(178 < X \leq 182) = 0.26$

Kjente kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

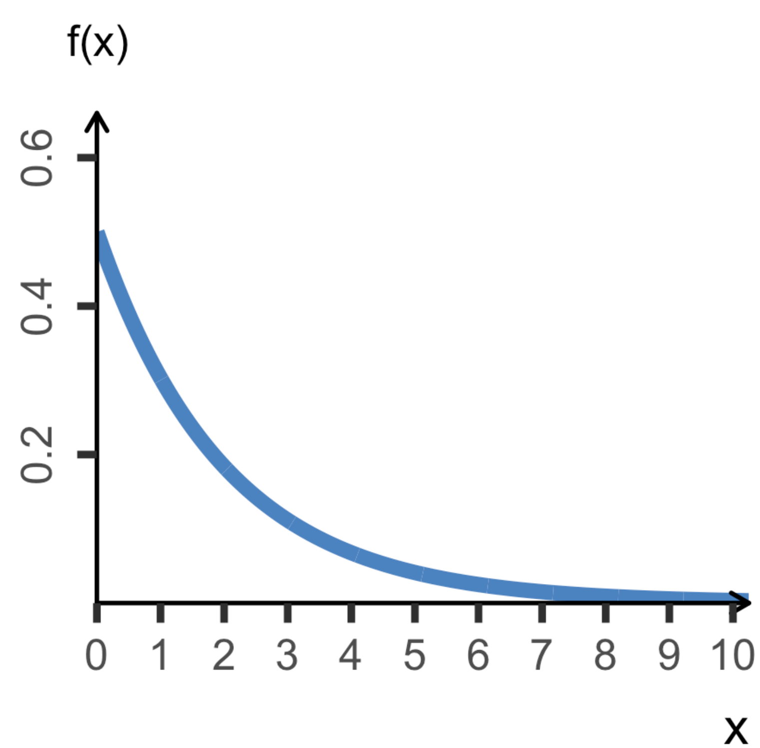
Normalfordeling

Eks:

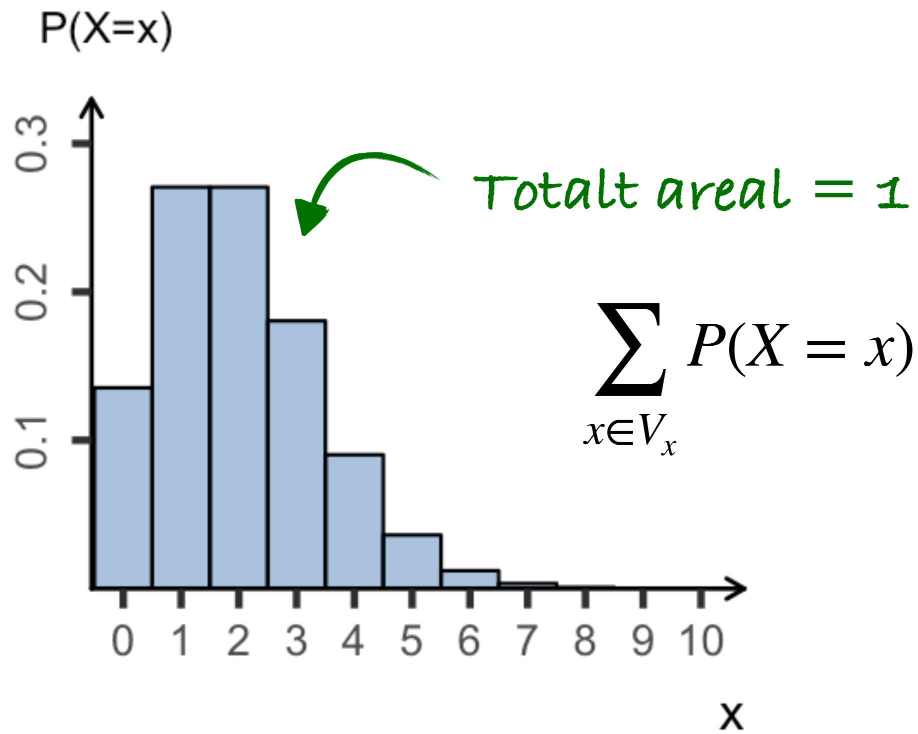


Eksponensialfordeling

Eks:

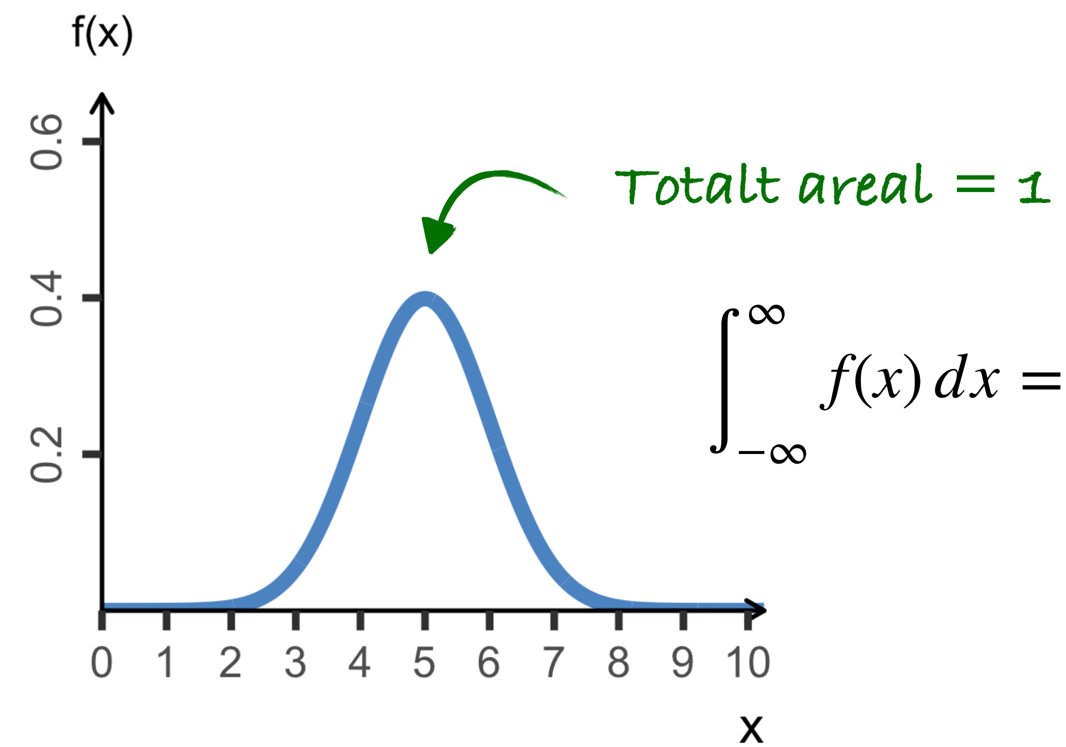


Diskret



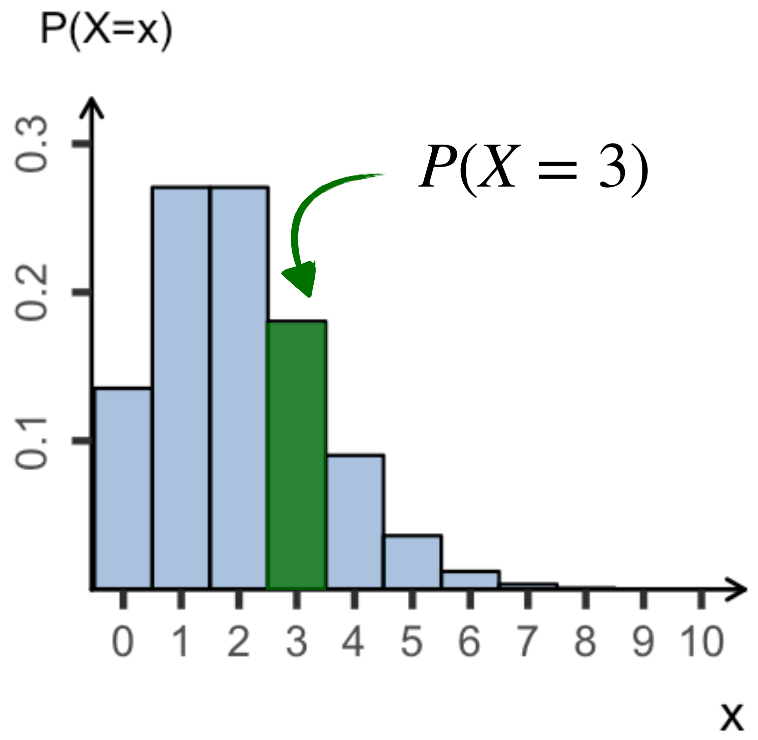
$$\sum_{x \in V_x} P(X = x) = 1$$

Kontinuerlig

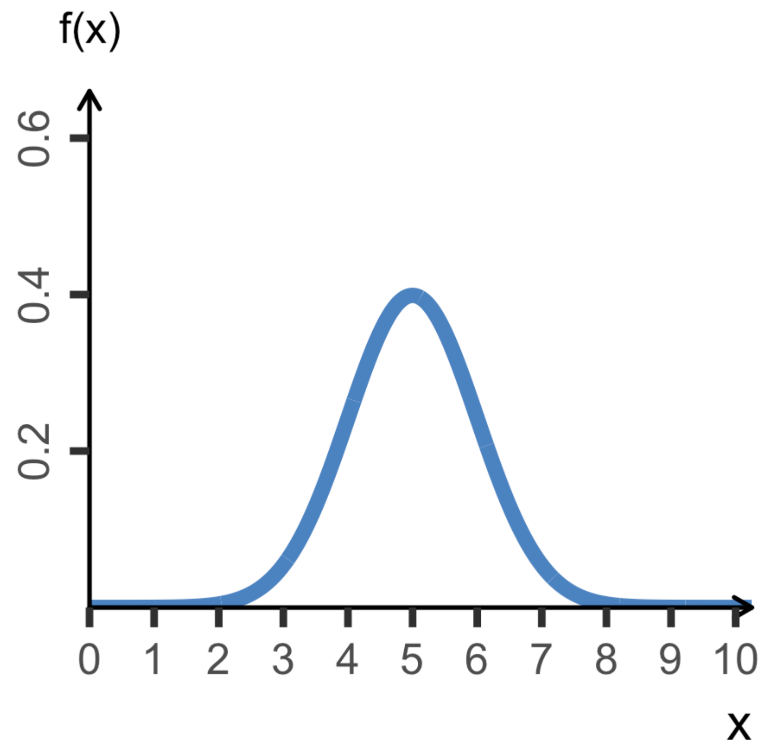


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

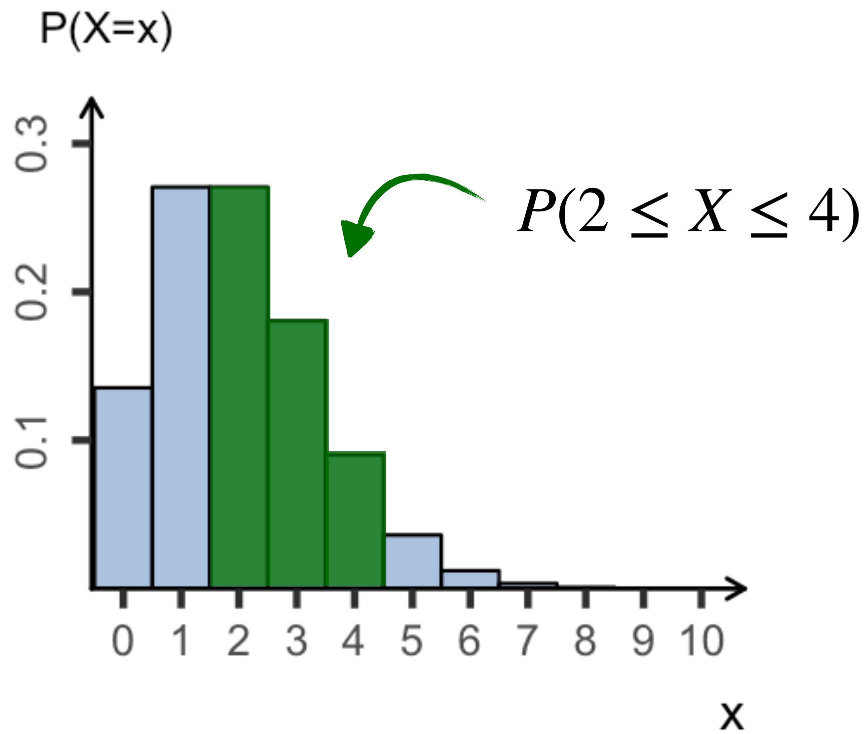
Diskret



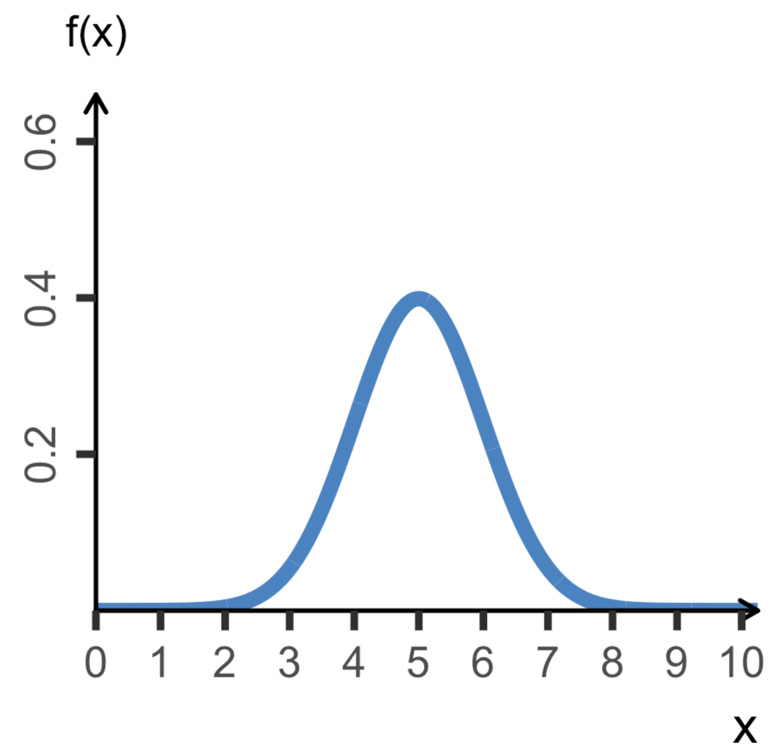
Kontinuerlig



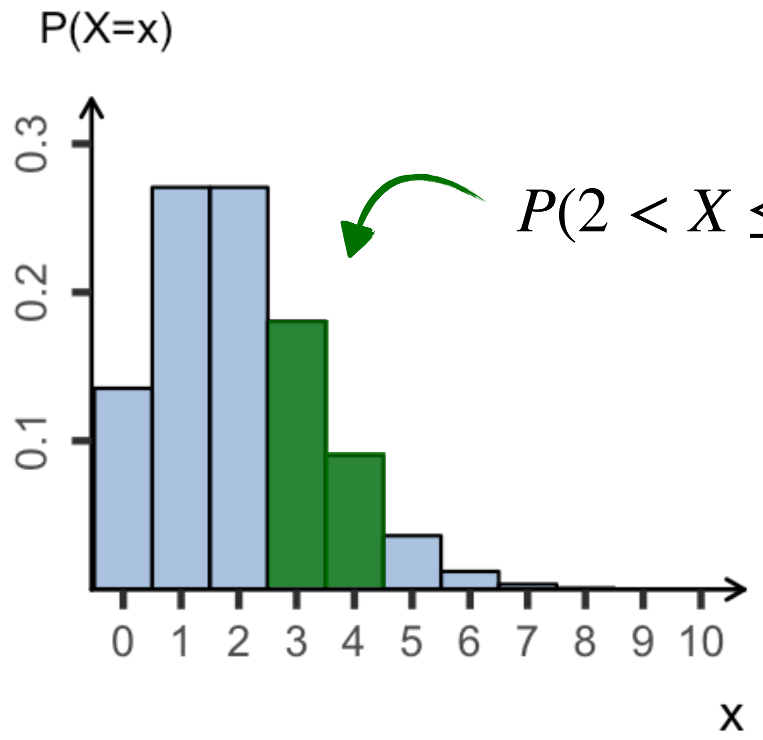
Diskret



Kontinuerlig

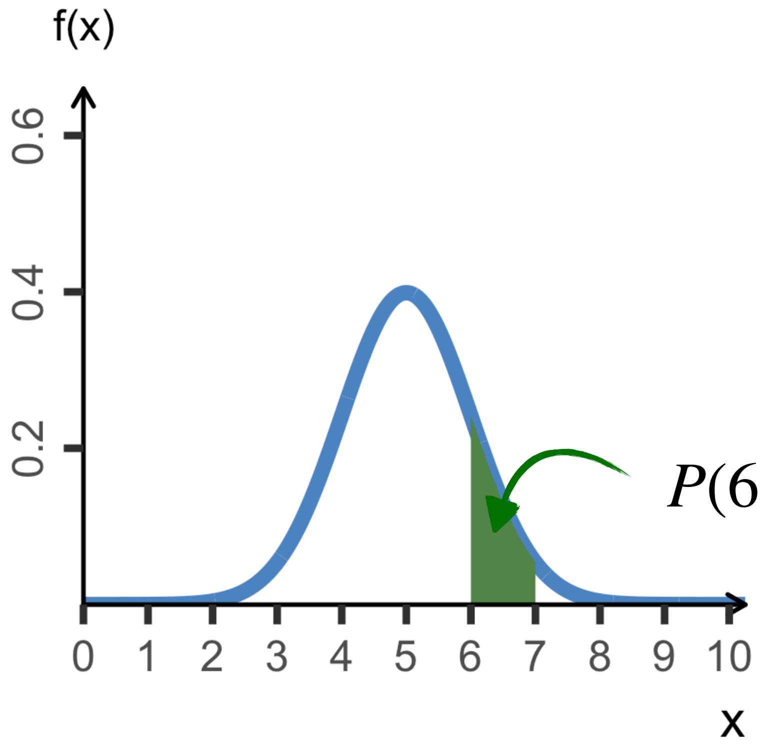


Diskret



$P(2 < X \leq 4)$

Kontinuerlig

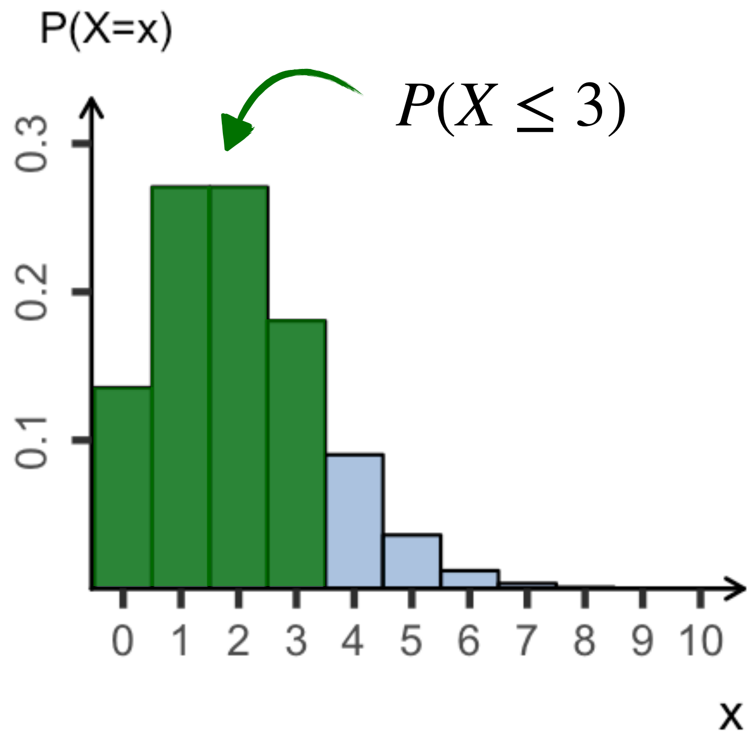


$P(6 \leq X \leq 7)$

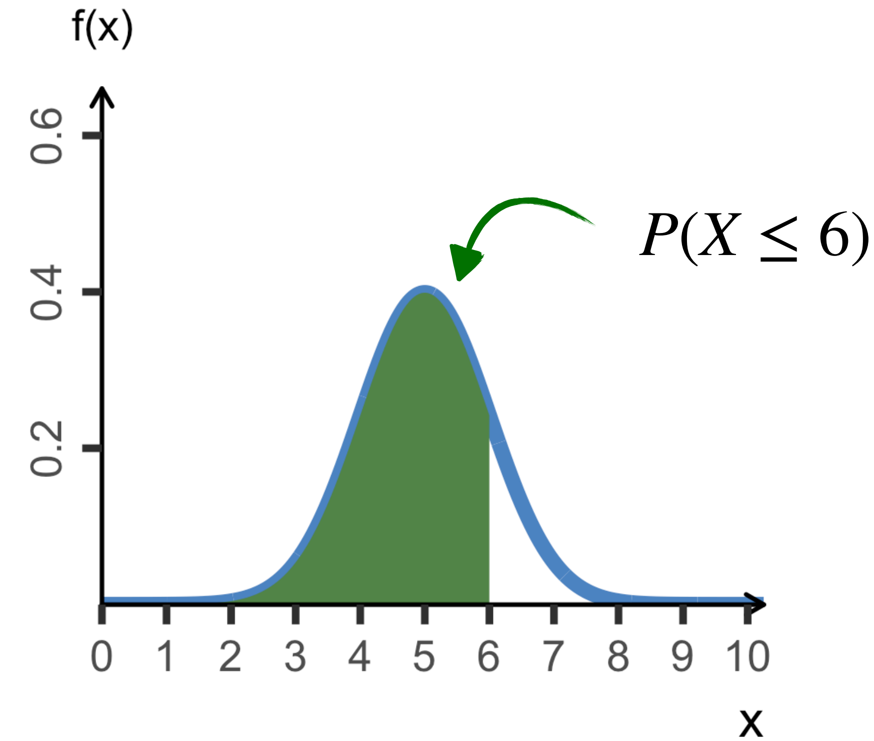
$= P(6 < X \leq 7)$

obs!

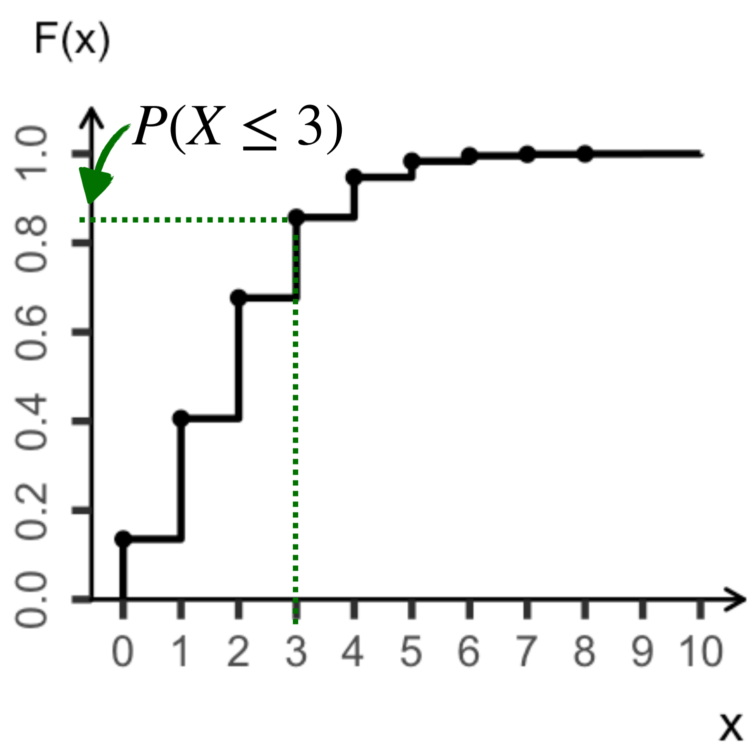
Diskret

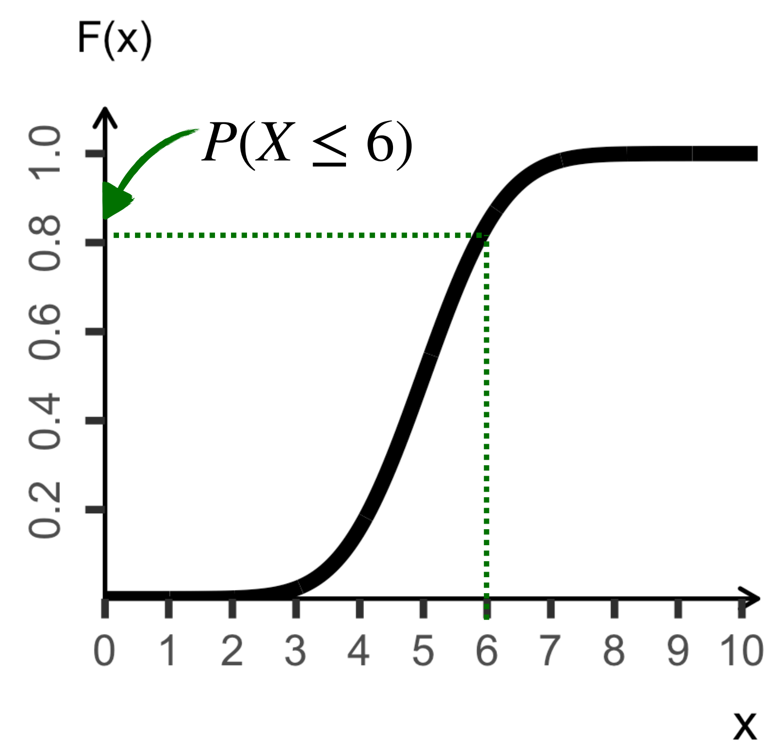


Kontinuerlig

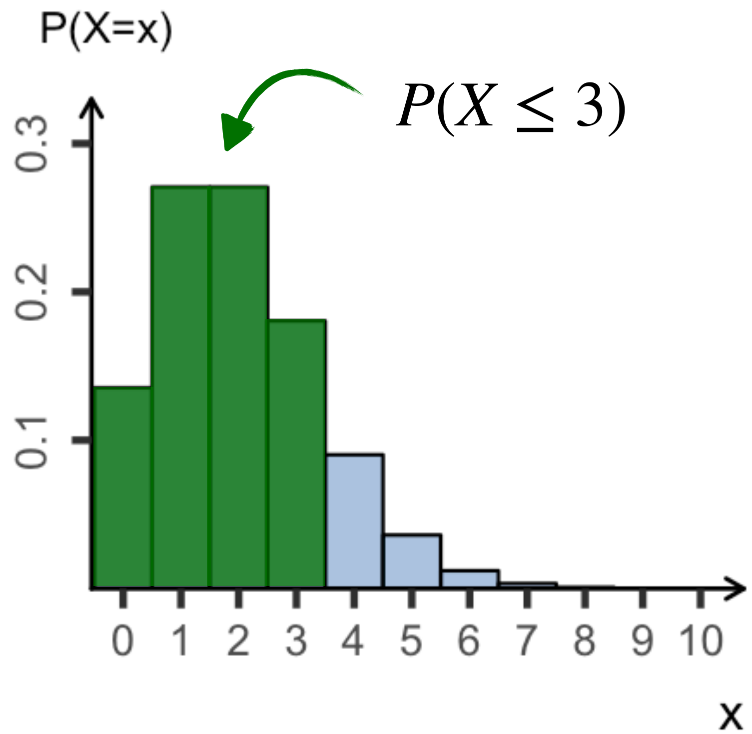


<u>Definisjon</u>: Kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = P(X \leq x)$

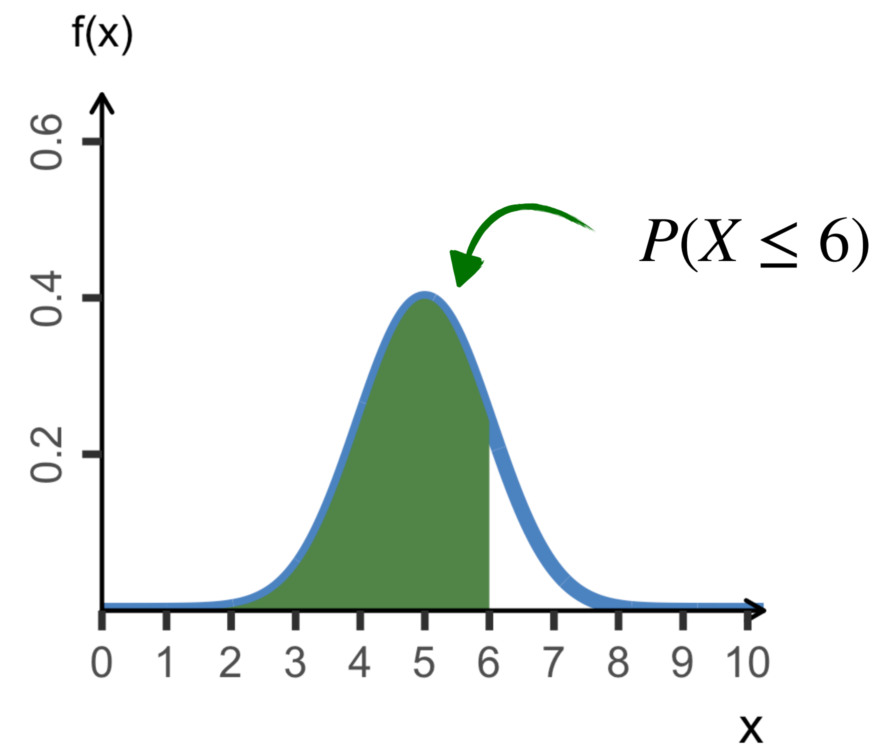




Diskret



Kontinuerlig

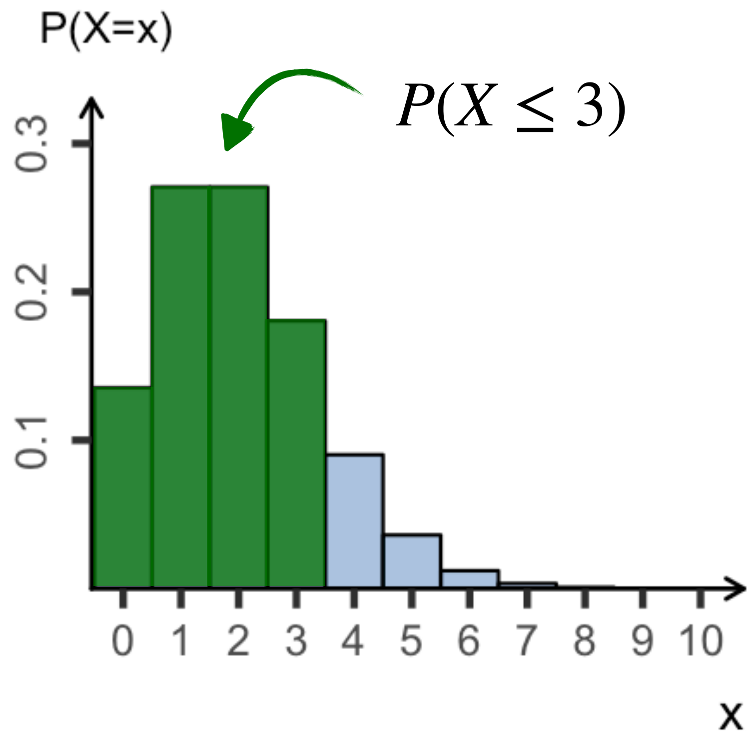


Definisjon: Kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = P(X \leq x)$

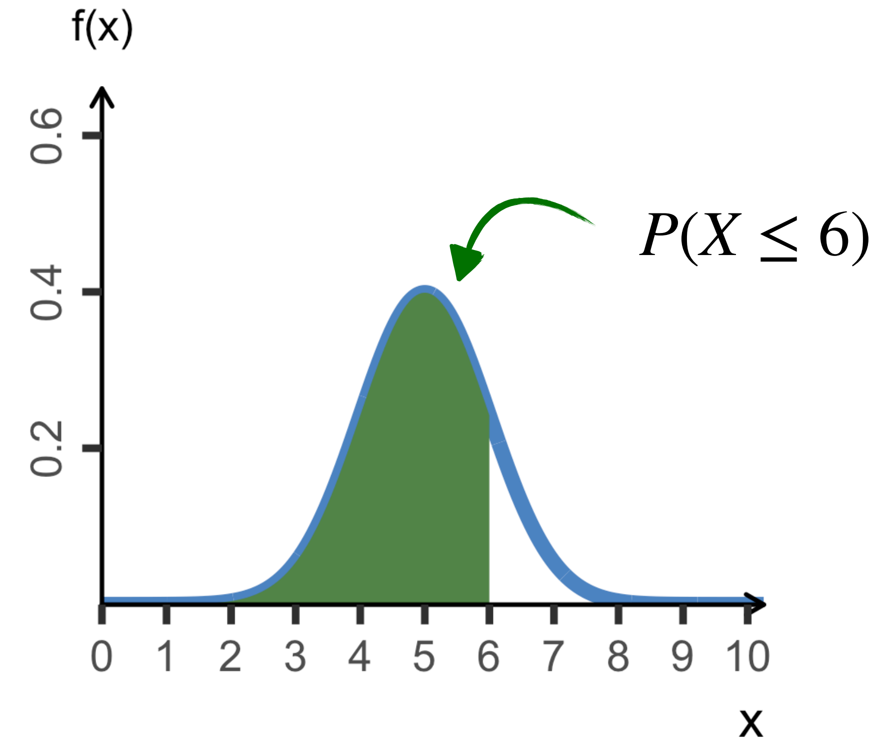
Regneregel 1: $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

obs!

Diskret



Kontinuerlig



Definisjon: Kumulativ fordelingsfunksjon $F(x) = P(X \leq x)$

Regneregel 1: $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

Regneregel 2: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

obs!