

Binomisk fordeling: bruk av tabeller i utregninger

**Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU**

Eksempel: Flervalgsprøve

Du tar en flervalgsprøve og er helt uforberedt.

Prøven består av 20 oppgaver med 4 svaralternativer, hvorav ett alternativ er korrekt.

Du består prøven dersom du har minst 8 riktige svar.

Hva er forventet antall riktige svar?

Hva er sannsynligheten for bestått?

Dersom 100 studenter møter uforberedt til prøven, hvor mange forventer vi at vil bestå?

Antagelser: 1. Du svarer helt tilfeldig på hver oppgave

2. Du svarer på hver oppgave uavhengige av hva du har svart før

$$p = \frac{1}{4} = 0.25$$

Binomisk forsøksrekke, $n = 20$ og $p = 0.25$

Eksempel: Flervalgsprøve

X : Stokastisk variabel som teller antall riktige svar

$$V_x = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$$

$$X \sim \text{Binomisk}(n = 20, p = 0.25)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$E(X) = 20 \cdot 0.25 = 5$$

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} \cdot 0.25^8 \cdot 0.75^{12} = 0.06$$

Eksempel: Flervalgsprøve

X : Stokastisk variabel som teller antall riktige svar

$$V_x = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$$

$X \sim \text{Binomisk}(n = 20, p = 0.25)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + \dots + P(X = 20)$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$$

$$P(X \leq 7) = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 7)$$

BINOMISK FORDELING: $P(X \leq x)$

 n	 x	p											
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0	0.902	0.810	0.723	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.040	0.010
	1	0.998	0.990	0.978	0.960	0.938	0.910	0.840	0.750	0.640	0.510	0.360	0.190
3	0	0.857	0.729	0.614	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.008	0.001
	1	0.993	0.972	0.939	0.896	0.844	0.784	0.648	0.500	0.352	0.216	0.104	0.028
	2	1.000	0.999	0.997	0.992	0.984	0.973	0.936	0.875	0.784	0.657	0.488	0.271
4	0	0.815	0.656	0.522	0.410	0.316	0.240	0.130	0.062	0.026	0.008	0.002	0.000
	1	0.986	0.948	0.890	0.819	0.738	0.652	0.475	0.313	0.179	0.084	0.027	0.004
	2	1.000	0.996	0.988	0.973	0.949	0.916	0.821	0.688	0.525	0.348	0.181	0.052
	3	1.000	1.000	0.999	0.998	0.996	0.992	0.974	0.938	0.870	0.760	0.590	0.344
5	0	0.774	0.590	0.444	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.000	0.000
	1	0.977	0.919	0.835	0.737	0.633	0.528	0.337	0.187	0.087	0.031	0.007	0.000
	2	0.999	0.991	0.973	0.942	0.896	0.837	0.683	0.500	0.317	0.163	0.058	0.009
	3	1.000	1.000	0.998	0.993	0.984	0.969	0.913	0.812	0.663	0.472	0.263	0.081
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.969	0.922	0.832	0.672	0.410
6	0	0.735	0.531	0.377	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
	1	0.967	0.886	0.776	0.655	0.534	0.420	0.233	0.109	0.041	0.011	0.002	0.000
	2	0.998	0.984	0.953	0.901	0.831	0.744	0.544	0.344	0.179	0.070	0.017	0.001
	3	1.000	0.999	0.994	0.983	0.962	0.930	0.821	0.656	0.456	0.256	0.099	0.016

BINOMISK FORDELING: $P(X \leq x)$

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>p</i>											
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
20	0	0.358	0.122	0.039	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.736	0.392	0.176	0.069	0.024	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.925	0.677	0.405	0.206	0.091	0.035	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.984	0.867	0.648	0.411	0.225	0.107	0.016	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.997	0.957	0.830	0.630	0.415	0.238	0.051	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	1.000	0.989	0.933	0.804	0.617	0.416	0.126	0.021	0.002	0.000	0.000	0.000
	6	1.000	0.998	0.978	0.913	0.786	0.608	0.250	0.058	0.006	0.000	0.000	0.000
	7	1.000	1.000	0.994	0.968	0.898	0.772	0.416	0.132	0.021	0.001	0.000	0.000
	8	1.000	1.000	0.999	0.990	0.959	0.887	0.596	0.252	0.057	0.005	0.000	0.000
	9	1.000	1.000	1.000	0.997	0.986	0.952	0.755	0.412	0.128	0.017	0.001	0.000
	10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.872	0.588	0.245	0.048	0.003	0.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.943	0.748	0.404	0.113	0.010	0.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	0.584	0.228	0.032	0.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	0.750	0.392	0.087	0.002
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	0.874	0.584	0.196	0.011
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.949	0.762	0.370	0.043
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.984	0.893	0.589	0.133
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	0.965	0.794	0.323
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.992	0.931	0.608
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.988	0.878

Eksempel: Flervalgsprøve

X : Stokastisk variabel som teller antall riktige svar

$$V_x = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$$

$X \sim \text{Binomisk}(n = 20, p = 0.25)$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.898 = 0.102$$

Eksempel: Flervalgsprøve

*Dersom 100 studenter møter uforberedt til prøven,
hvor mange forventer vi at vil bestå?*

Y : Stokastisk variabel som teller antall “beståtte” besvarelses

$$V_y = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$$

$$Y \sim \text{Binomisk}(n = 100, p = 0.102)$$

$$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0.102 = 10.2$$

Eksempel: Flervalgsprøve

Dersom 100 studenter møter uforberedt til prøven, hvor mange forventer vi at vil bestå?

Y : Stokastisk variabel som teller antall “beståtte” besvarelses

$$V_y = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$$

$$Y \sim \text{Binomisk}(n = 100, p = 0.102)$$

$$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0.102 = 10.2$$

Hva er sannsynligheten for at mer enn 15 av de uforberedte studentene består prøven?

$$P(Y > 15) = ?$$

Tabell?

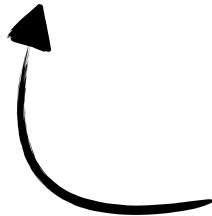
$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15)$$

Statistisk programvare!

Python

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) \quad Y \sim \text{Binomisk}(n = 100, p = 0.102)$$

```
from scipy import stats
```



En python-modul som inneholder
masse praktiske statistikk-funksjoner

Python

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) \quad Y \sim \text{Binomisk}(n = 100, p = 0.102)$$

```
from scipy import stats
```

```
stats.binom.cdf(15, 100, 0.102)
```

Binomisk fordeling

cdf = "cumulative distribution function"

Kumulativ fordeling $F(x) = P(X \leq x)$

parameteren $p = 0.102$

parameteren $n = 100$

det tallet vi er interessert i

Python

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) \quad Y \sim \text{Binomisk}(n = 100, p = 0.102)$$

```
from scipy import stats
```

```
stats.binom.cdf(15, 100, 0.102)
```

```
0.9535798159949914
```

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) \approx 1 - 0.95 = 0.05$$