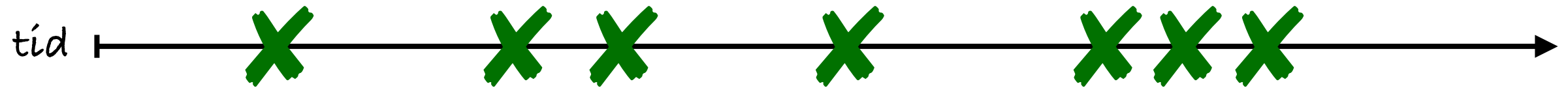


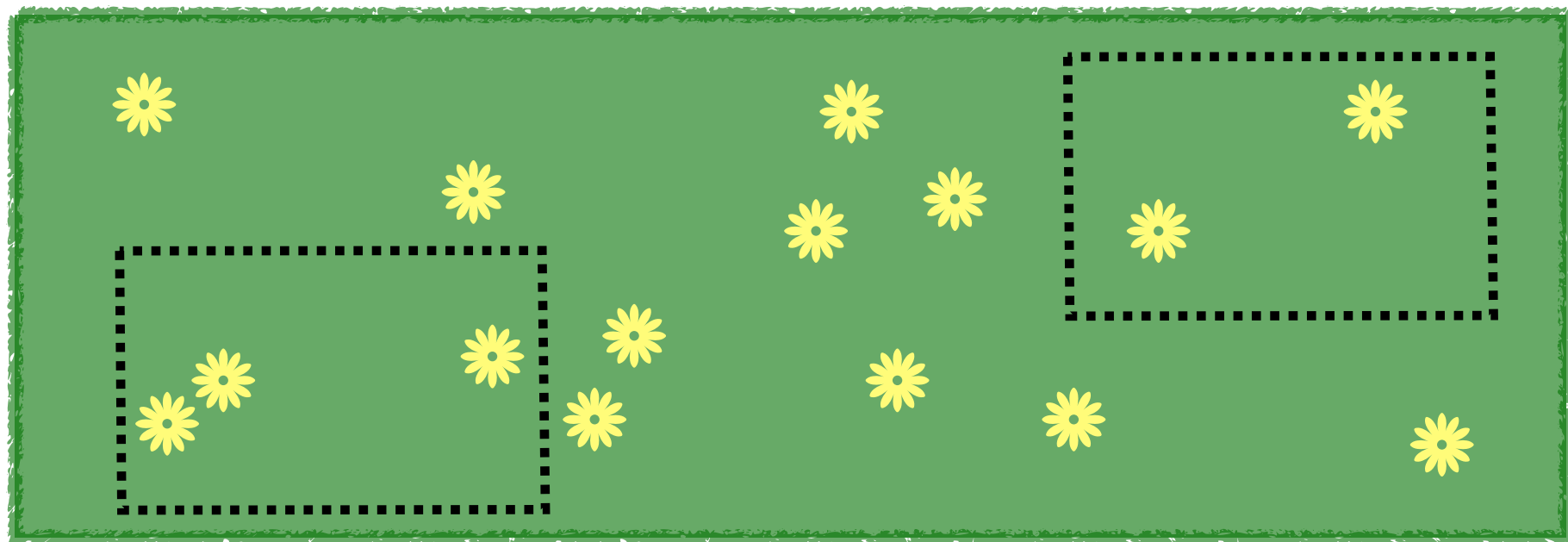
Poissonprosess og poissonfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Eksempler



Antall hendelser i et tidsintervall



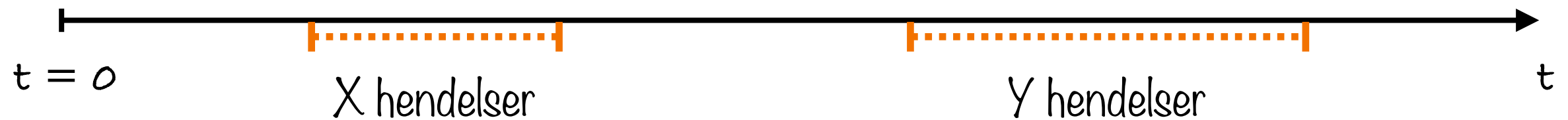
Antall hendelser innenfor et avgrenset område

Poissonprosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig

Områder

"Hendelser skjer uavhengige av hverandre"



X og Y er uavhengige stokastiske variabler

"En poissonprosess i tid er hukommelsesløs!"

Poissonprosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt

Parameter
"Rate"

λ = Forventet antall
hendelser per tidsenhet



Eksempel: Ankomst av kunder til frisørsalong

$\lambda = 3$

Kunder ankommer uavhengige av hverandre Gjennomsnittlig 3 kunder hver time

Forventet antall kunder mellom klokka 10:00 og 12:00 = $\lambda \cdot 2 = 6$ kunder

Forventet antall kunder mellom klokka 14:00 og 16:00 = $\lambda \cdot 2 = 6$ kunder

Poissonprosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt

Parameter
"Rate"

λ = Forventet antall
hendelser per tidsenhet



Eksempel: Ankomst av studenter til en kantine

Vi forventer flere studenter mellom klokka 12:00 og 12:30 enn mellom klokka 10:30 og 11:00

Poissonprosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig

2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt

Parameter
"Rate"



"Forventet antall hendelser er det samme overalt / når som helst"

λ = Forventet antall
hendelser per tidsenhet

Poissonprosess

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt
3. Sannsynligheten for at mer enn én hendelse skjer i et lite intervall er *neglisjerbar*

“To hendelser kan ikke skje akkurat samtidig eller på akkurat samme sted”

 område

Poissonfordeling

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt
3. Sannsynligheten for at mer enn én hendelse skjer i et lite intervall er *neglisjerbar*

X : antall hendelser i løpet av t tidsenheter

eller antall hendelser i et område
av størrelse t (m^2, m^3)

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

X_t ↗

Poissonfordeling

Eksempel: Ankomst av kunder til frisørsalong

Poissonprosess

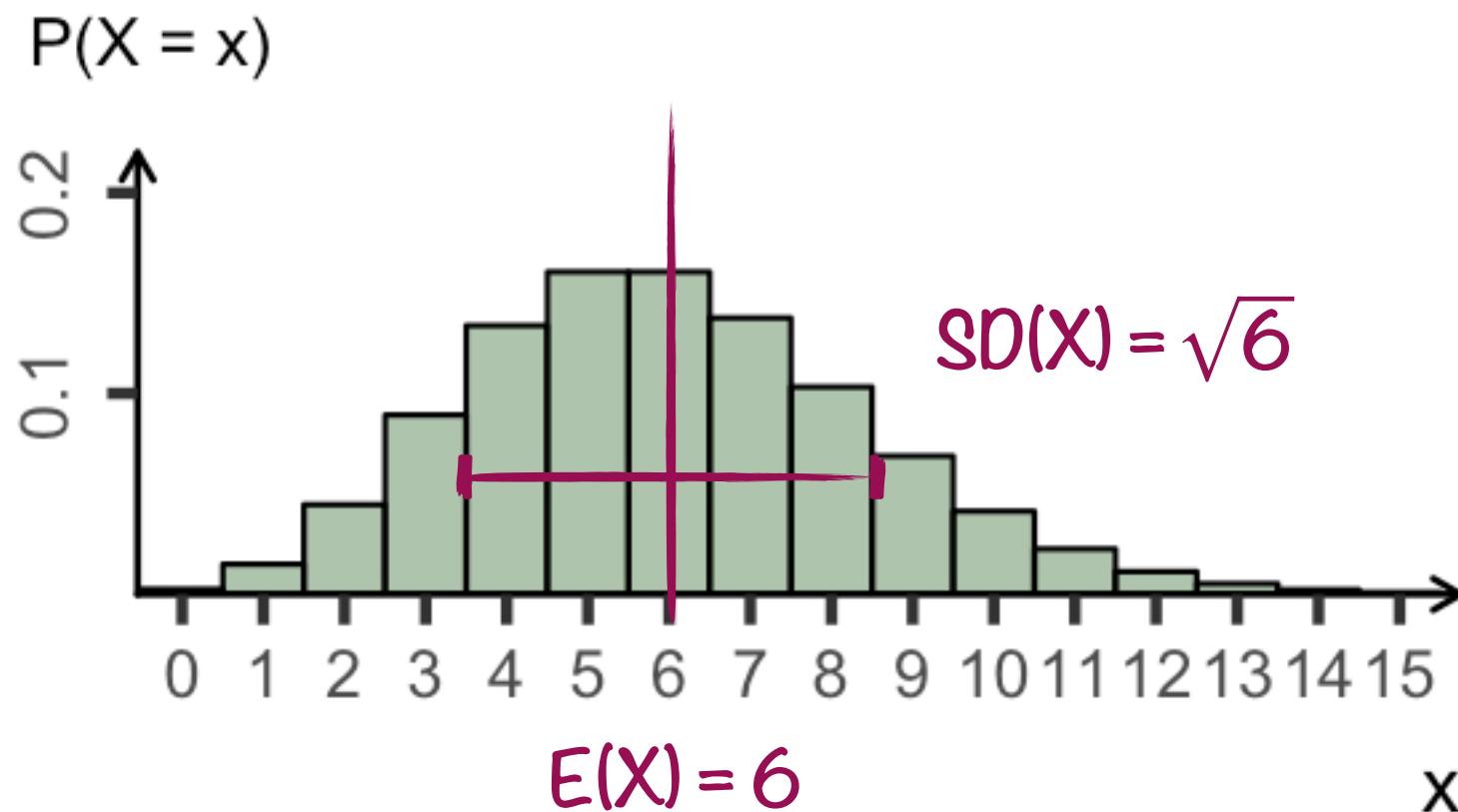
↪ $\lambda = 3$

Kunder ankommer uavhengige av hverandre

Gjennomsnittlig 3 kunder hver time

X : Antall kunder som kommer i løpet av **to** timer

$X \sim \text{Poisson}(6)$



Poissonfordeling

1. Antall hendelser i disjunkte intervaller er uavhengig
2. Forventet antall hendelser i et intervall av lengde t er alltid lik λt
3. Sannsynligheten for at mer enn én hendelse skjer i et lite intervall er *neglisjerbar*

X : antall hendelser i løpet av t tidsenheter

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda t \quad \text{Var}(X) = \lambda t$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$P(X \leq x) = ?$$

programvare, tabeller ...

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t) \quad \lambda t = 20 \cdot 0.25 = 5$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

Løsning 1: Summere punktsannsynligheter

Løsning 2: Tabeller

Løsning 3: Python

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda t) \quad \lambda t = 20 \cdot 0.25 = 5$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.4405 = 0.5595$$

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X \leq 4) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} + \frac{5^2}{2!}e^{-5} + \frac{5^3}{3!}e^{-5} + \frac{5^4}{4!}e^{-5} = 0.4405$$

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$\lambda \cdot t = 20 \cdot 0.25 = 5 \quad X_{0.25} \sim \text{Poisson}(5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

Tabell!

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$\lambda \cdot t = 20 \cdot 0.25 = 5 \quad X_{0.25} \sim \text{Poisson}(5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.4405 = 0.5595$$

Tabell!

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$\lambda \cdot t = 20 \cdot 0.25 = 5 \quad X_{0.25} \sim \text{Poisson}(5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

```
from scipy import stats
```

En python-modul som inneholder
mange nyttige statistikk-funksjoner

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$\lambda \cdot t = 20 \cdot 0.25 = 5 \quad X_{0.25} \sim \text{Poisson}(5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

```
from scipy import stats
```

```
1 - stats.poisson.cdf(4, 5)
```

parameteren $\lambda t = 5$

det tallet vi er interessert i

Regneeksempel

SMS meldinger blir mottatt ved en basestasjon i henhold til en poissonprosess med rate $\lambda = 20$ per minutt.

Hva er sannsynligheten for at det blir mottatt minst fem SMS meldinger i løpet av 15 sekunder?

$$t = 0.25 \text{ minutt}$$

$$\lambda \cdot t = 20 \cdot 0.25 = 5 \quad X_{0.25} \sim \text{Poisson}(5)$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0.5595$$

```
from scipy import stats
```

```
1 - stats.poisson.cdf(4,5)
```

```
0.5595067149347874
```