

Ekspponentialfordeling

**Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU**

Eksempel: Innlegg i forum

Vi antar at personer som bruker forumet opptrer uavhengig av hverandre.

Vi antar at alle tidspunkt i intervallet er like populære for innlegg

Fra erfaring vet vi at vi kan forvente ca 5 nye innlegg i løpet av én time.

Poissonprosess med rate $\lambda = 5$ hendelser / time

Y = antall hendelser i løpet av $t = 1$ time

$Y \sim \text{Poisson}(\lambda t = 5)$

Hvor lenge må vi vente før første innlegg blir lagt inn?

T = tid frem til første nye innlegg

Kontinuerlig stokastisk variabel

“Ventetiden i en Poissonprosess”

Poissonprosess (tid)

- Hendelser skjer uavhengig av hverandre
- To hendelser kan ikke skje akkurat samtidig
- Forventet antall hendelser er det samme når som helst:

λ hendelser / tidsenhet

X_t : antall hendelser i løpet av t tidsenheter $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$P(X_t = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Hva slags sannsynlighetsfordeling har T ?

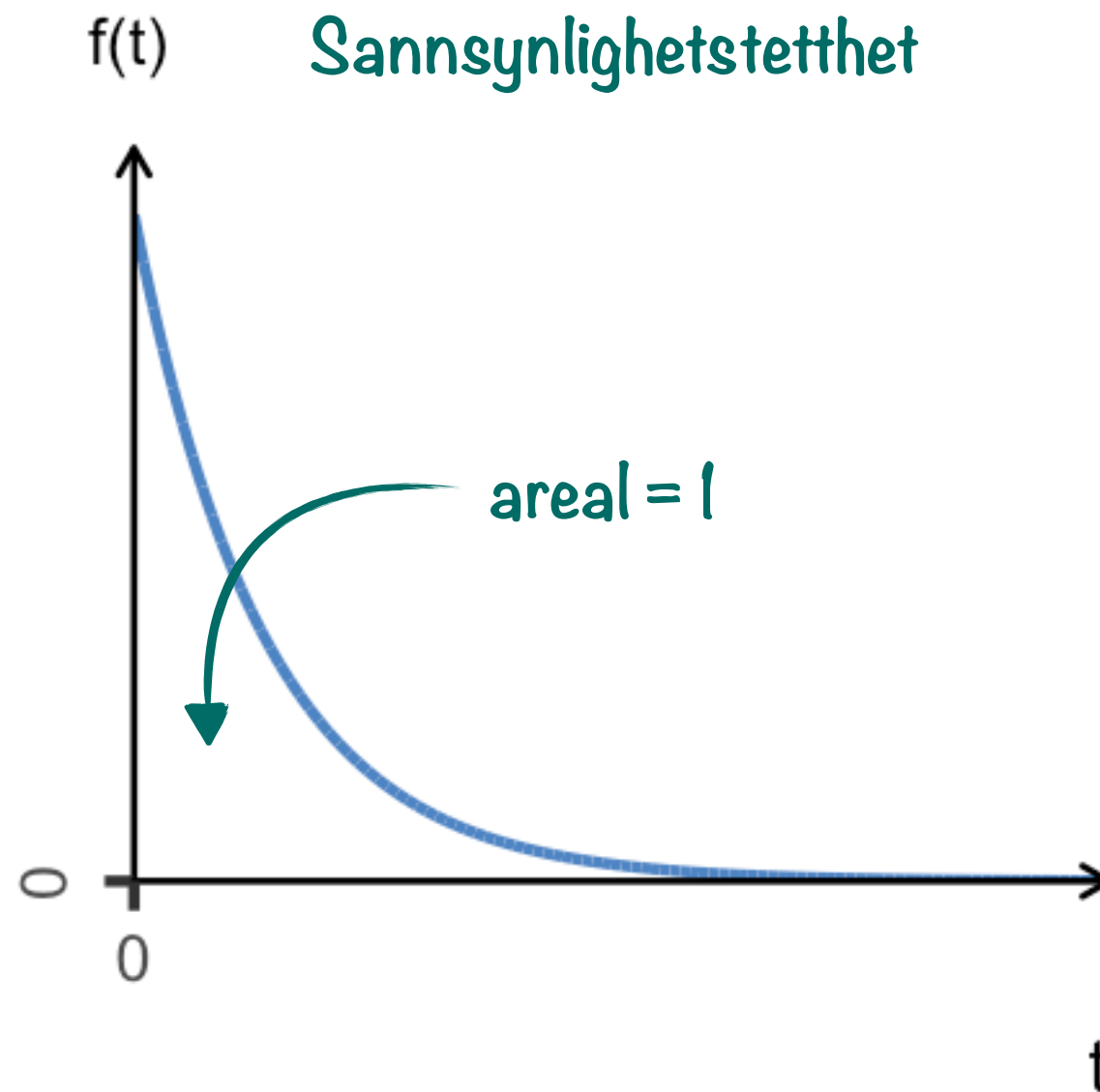
T : tid frem til neste hendelse

$$P(T > t) = P(X_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

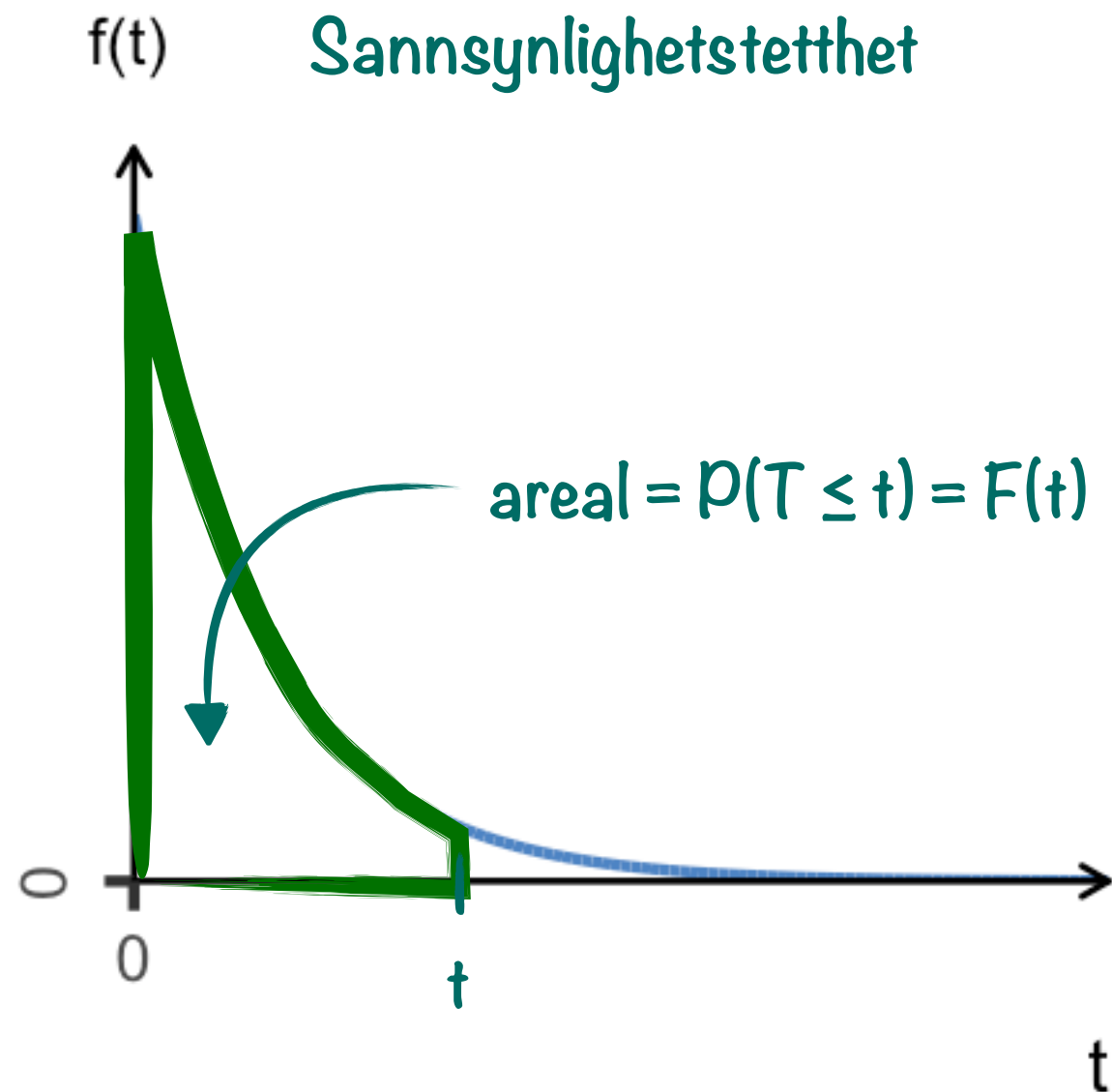
 Ingen hendelser i et intervall av lengde t

 Kumulativ fordelingsfunksjon
 $F(t) = P(T \leq t)$

Kumulativ fordeling $F(t)$ vs. sannsynlighetstetthet $f(t)$



Kumulativ fordeling $F(t)$ vs. sannsynlighetstetthet $f(t)$



$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

Poissonprosess (tid)

- Hendelser skjer uavhengig av hverandre
- To hendelser kan ikke skje akkurat samtidig
- Forventet antall hendelser er det samme når som helst:

λ hendelser / tidsenhet

X_t : antall hendelser i løpet av t tidsenheter $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$P(X_t = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Hva slags sannsynlighetsfordeling har T ?

T : tid frem til neste hendelse

$$P(T > t) = P(X_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

 Ingen hendelser i et intervall av lengde t

 Kumulativ fordelingsfunksjon

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$$

 Sannsynlighetstetthet

Ekspontentialfordelingen

T : tid frem til neste hendelse i en Poissonprosess

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$T \sim \text{eksponential}(\lambda)$

Eksempel: Innlegg i forum

Vi antar at personer som bruker forumet opptrer uavhengig av hverandre.

Vi antar at alle tidspunkt i intervallet er like populære for innlegg

Fra erfaring vet vi at vi kan forvente ca 5 nye innlegg i løpet av én time.

Hvor lenge må vi vente før første innlegg kommer?

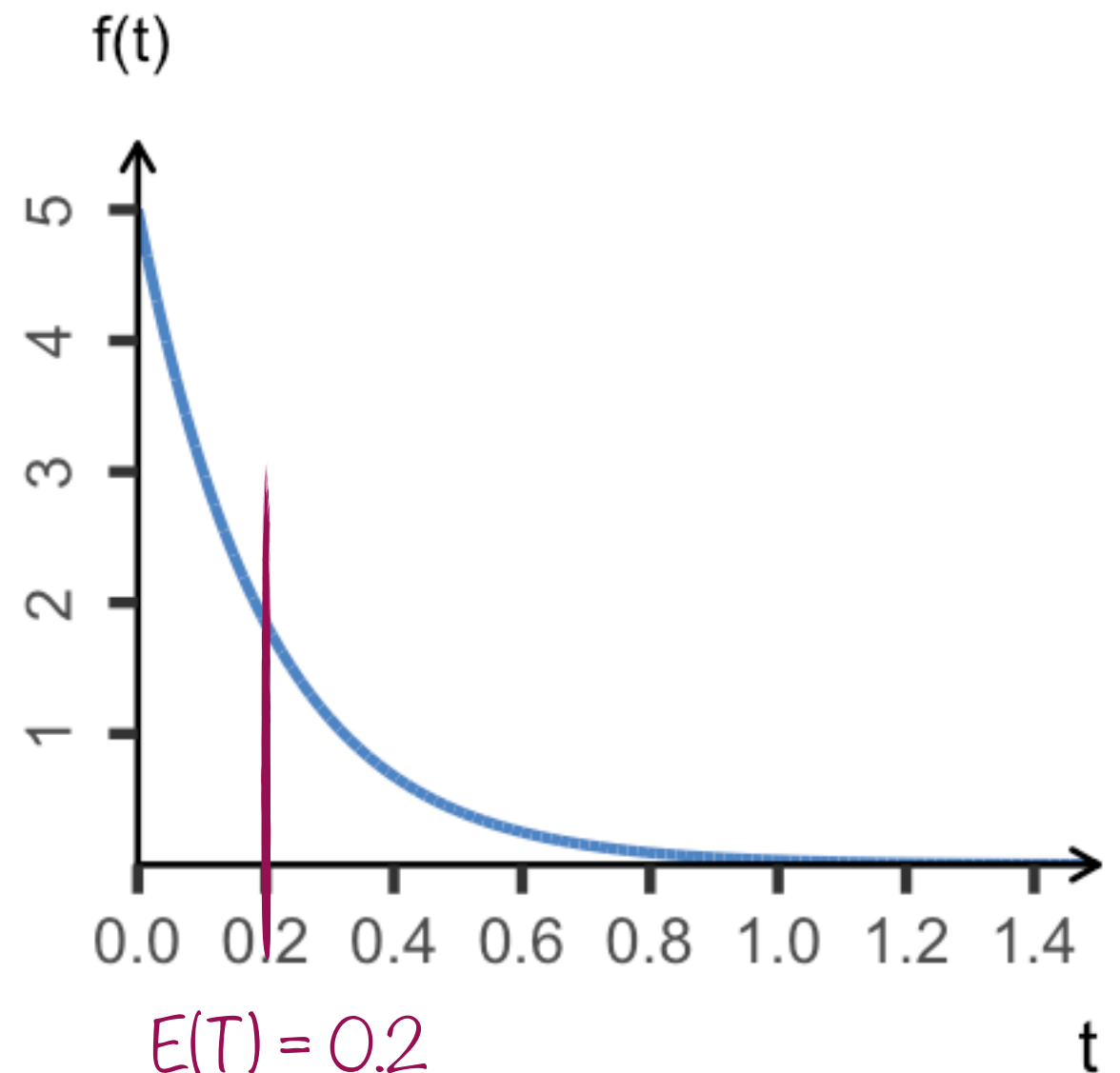
T = tid frem til første nye innlegg

$T \sim \text{eksponensial}(5)$ $f(t) = 5e^{-5t}$

$$E(T) = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ timer} = 12 \text{ minutter}$$

“En poissonprosess i tid
er hukommelsesløs!”

Gjennomsnittlig tid mellom innlegg ≈ 12 min



Eksempel: Innlegg i forum

Vi antar at personer som bruker forumet opptrer uavhengig av hverandre.

Vi antar at alle tidspunkt i intervallet er like populære for innlegg

Fra erfaring vet vi at vi kan forvente ca 5 nye innlegg i løpet av én time.

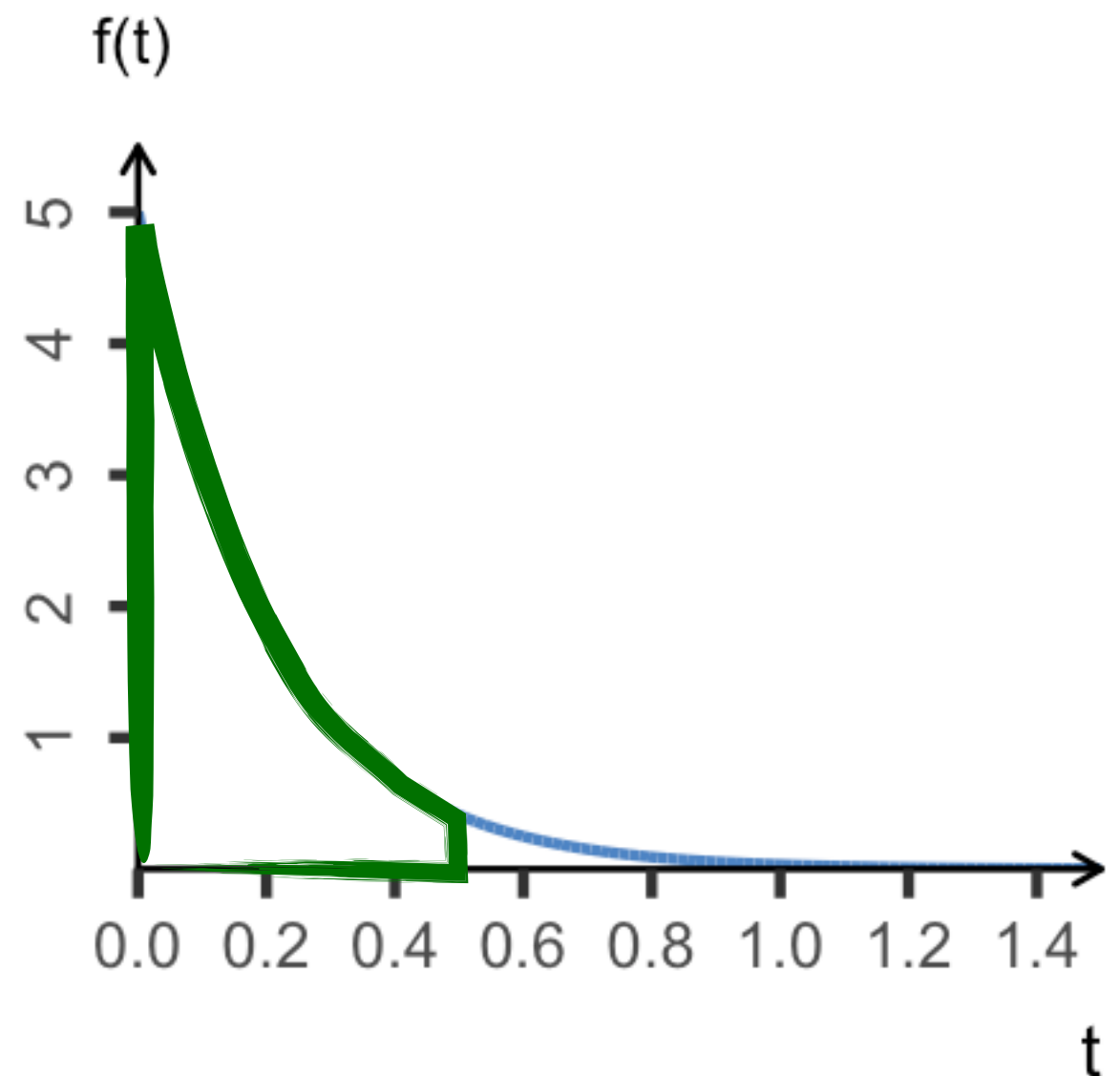
Hvor lenge må vi vente før første innlegg kommer?

T = tid frem til første nye innlegg

$T \sim \text{eksponensial}(5)$ $f(t) = 5e^{-5t}$

$E(T) = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ timer} = 12 \text{ minutter}$

$P(T \leq 0.5) = 1 - e^{-5 \cdot 0.5} = 0.918$



Eksponentialfordelingen

T : tid frem til neste hendelse i en Poissonprosess

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Eks: T er levetiden til en lyspære

λ : feilrate

Ingen slitasje!

→ Weibullfordeling

$T \sim \text{eksponential}(\lambda)$

Tid frem til første hendelse i en poissonprosess

Tid mellom to hendelser

Levetid