Lineærtransformasjoner og standard normalfordeling

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Rep: Regneregler for lineærtransformasjoner

La a og b være konstanter, og X en stokastisk variabel

$$aX + b$$

legge til en konstant

gange med en konstant

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Lineærtransformasjoner i normalfordelingen

La X være en ***normalfordelt*** stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ

$$E(X) = \mu$$

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

$$SD(X) = \sigma$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Lineærtransformasjoner i normalfordelingen

La X være en ***normalfordelt*** stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Dersom a og b er konstanter, og $a \neq 0$, så er

$$aX + b$$ også normalfordelt!

Lineærtransformasjonen av X er normalfordelte!!!

Viktig resultat!

Dersom X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ så er

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Lineærtransformasjonen av X er også normalfordelt!!!

Obs: Dette er en lineærtransformasjon!

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$a = \frac{1}{\sigma} \qquad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

Viktig resultat!

Dersom X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ så er

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Forventningsverdien er 0

Obs: Dette er en lineærtransformasjon!

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$a = \frac{1}{\sigma} \qquad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

$$E(aX+b) = a\mu + b$$

$$= \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$= 0$$

Viktig resultat!

Dersom X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ så er

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Standardavviket er 1

Obs: Dette er en lineærtransformasjon!

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$a = \frac{1}{\sigma} \qquad b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= a^2\sigma^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Viktig resultat!

Dersom X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ så er

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Standard normalfordelt

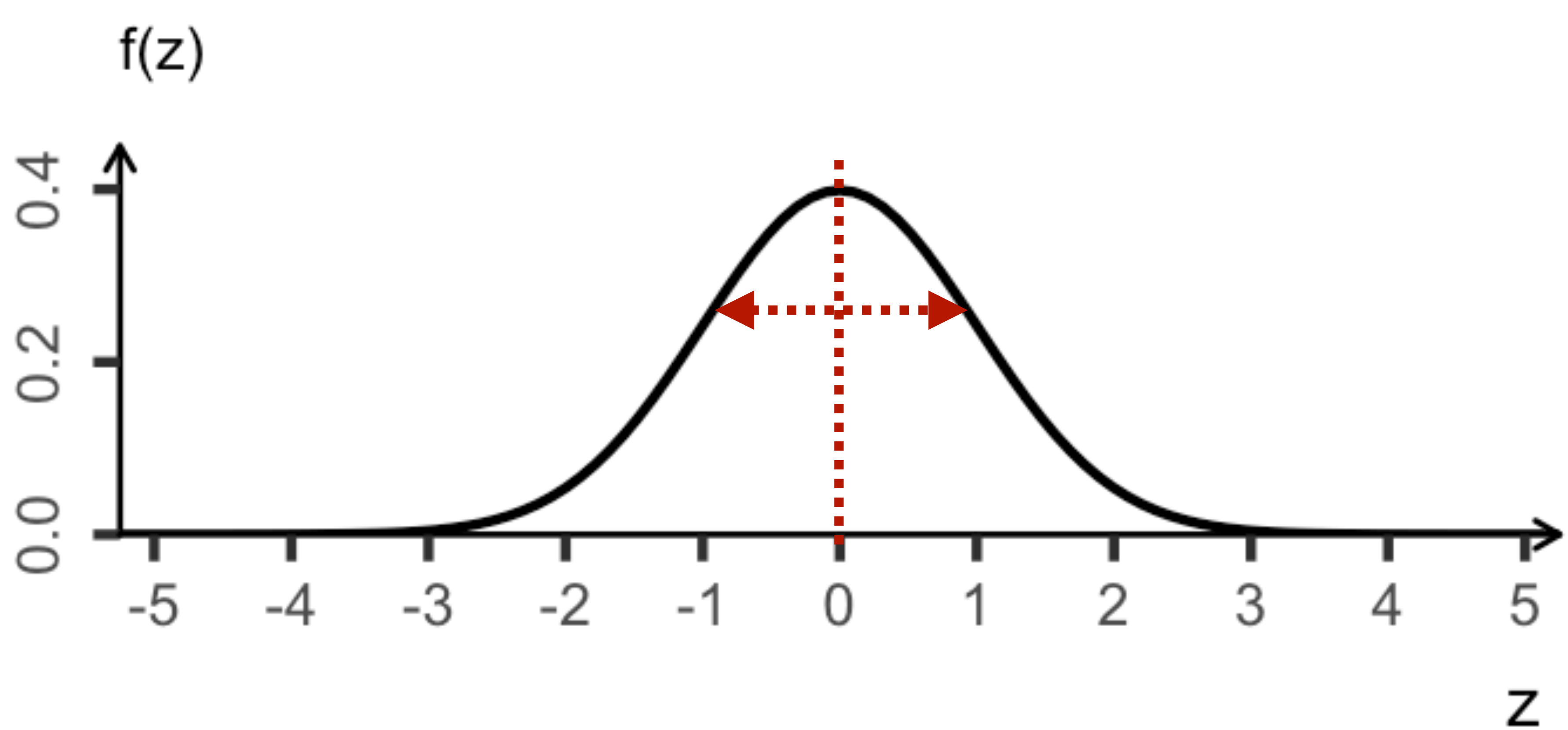
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Standard normalfordelingen

Def:

En normalfordelt stokastisk variabel Z med forventningsverdi 0 og standardavvik 1 kalles *standard normalfordelt*

$$Z \sim N(0,1) \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \longleftarrow \quad \phi(z)$$



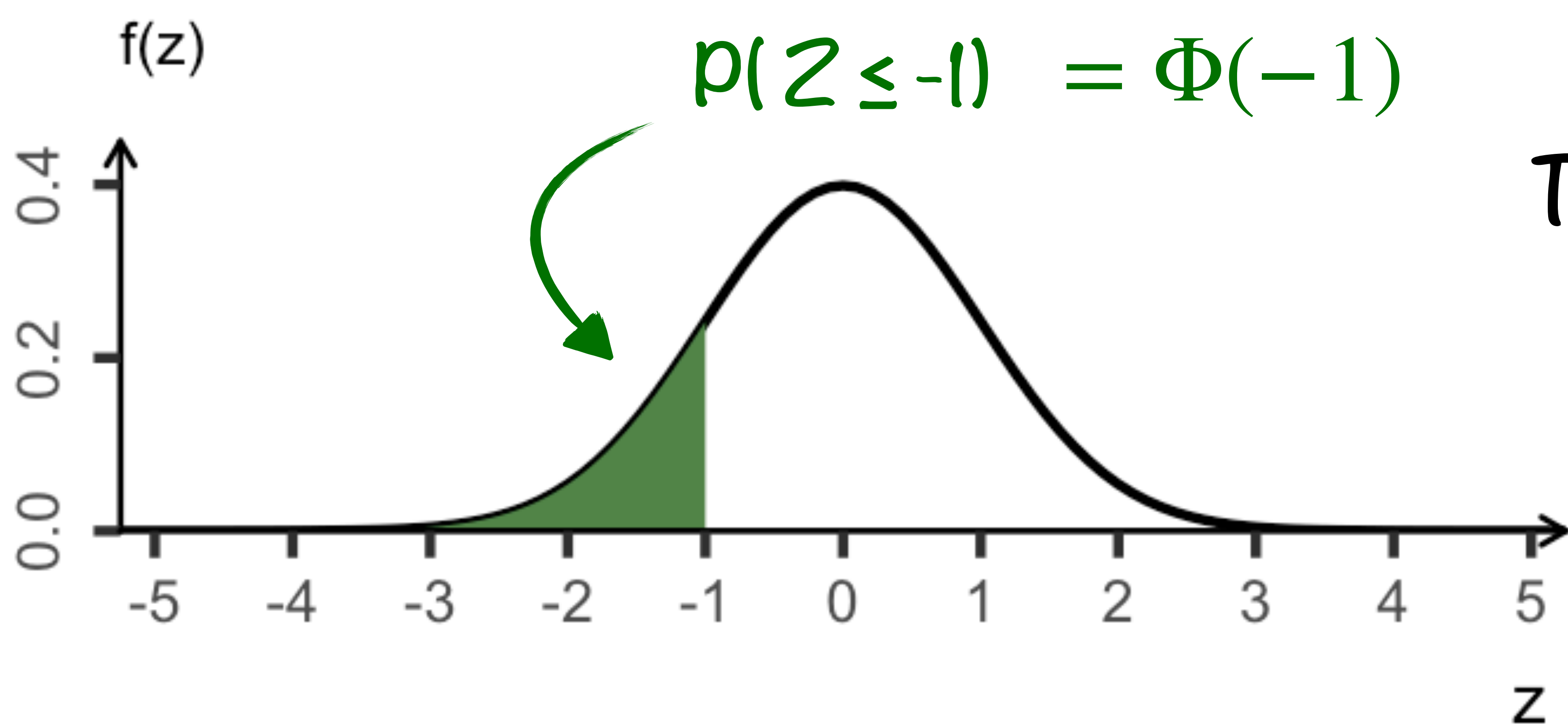
Standard normalfordelingen

Def:

En normalfordelt stokastisk variabel Z med forventningsverdi 0 og standardavvik 1 kalles *standard normalfordelt*

$$Z \sim N(0,1) \qquad\qquad P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$P(Z \leq -1) = \Phi(-1)$



Tabell!

STANDARD NORMALFORDELING: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	_ . _0	_ . _1	_ . _2	_ . _3	_ . _4	_ . _5	_ . _6	_ . _7	_ . _8	_ . _9
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247

Eksempel:

$P(Z \leq -1.98)$

STANDARD NORMALFORDELING: $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

z	_._0	_._1	_._2	_._3	_._4	_._5	_._6	_._7	_._8	_._9
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	[illegible]	[illegible]	[illegible]
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247

Oppgave:

$p(Z \leq -1)$

$p(Z \leq -1.00)$

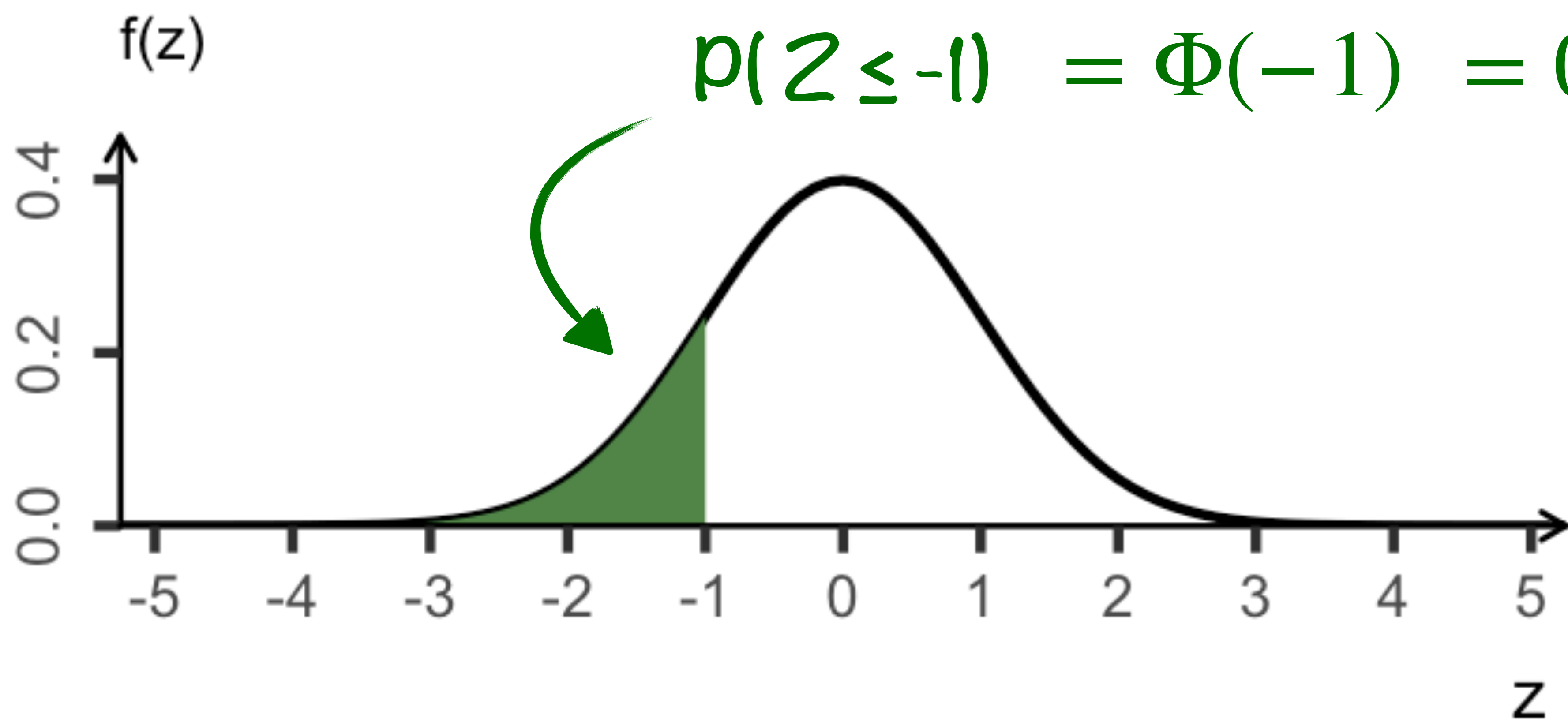
Standard normalfordelingen

Def:

En normalfordelt stokastisk variabel Z med forventningsverdi 0 og standardavvik 1 kalles *standard normalfordelt*

$$Z \sim N(0,1) \qquad\qquad P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 0.1587$$



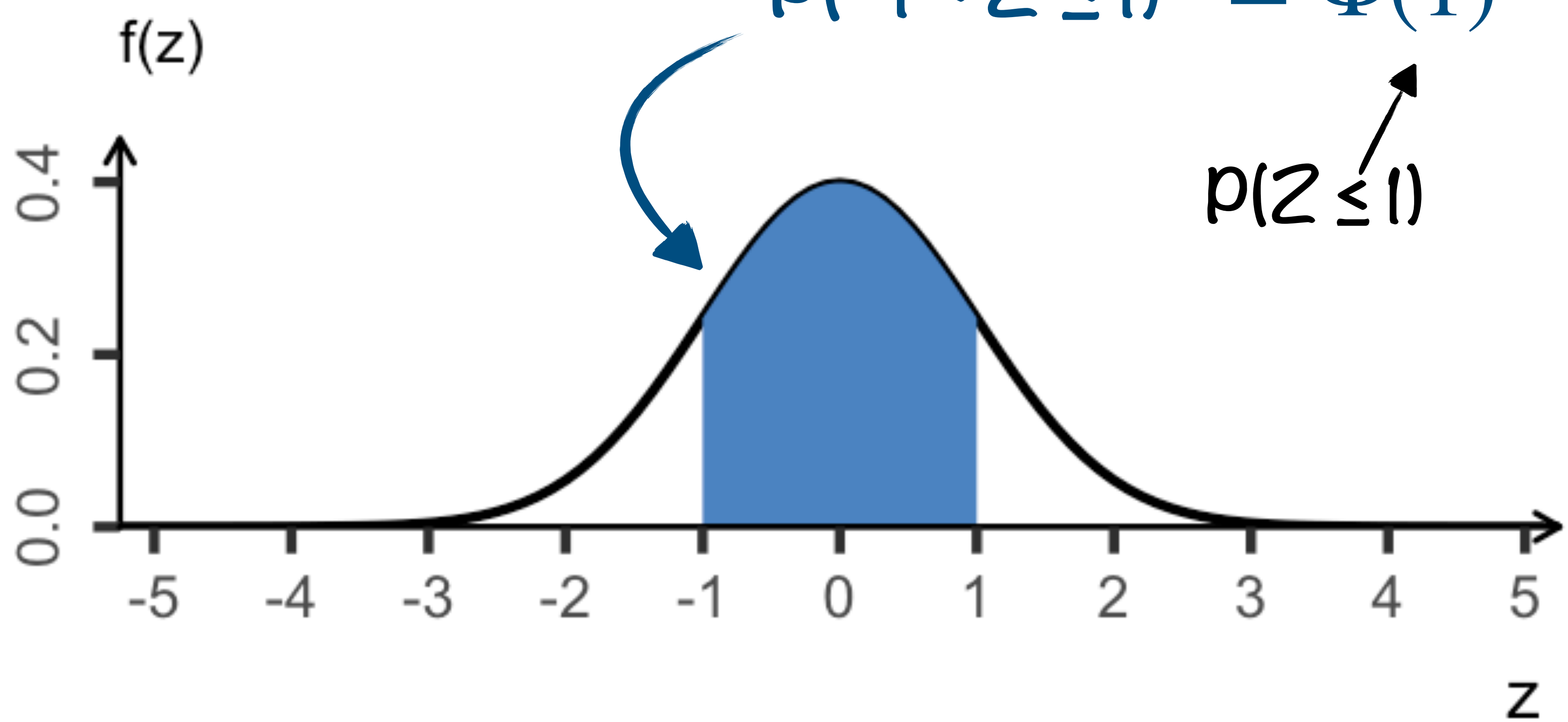
Standard normalfordelingen

Def:

En normalfordelt stokastisk variabel Z med forventningsverdi 0 og standardavvik 1 kalles *standard normalfordelt*

$$Z \sim N(0, 1) \qquad\qquad P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$p(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$



$p(Z \leq 1)$

$p(Z \leq -1)$

$= 0.1587$

z	_._0	_._1	_._2	_._3	_._4	_._5	_._6	_._7	_._8	_._9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Oppgave:

$p(Z \le 1)$

$p(Z \le 1.00)$

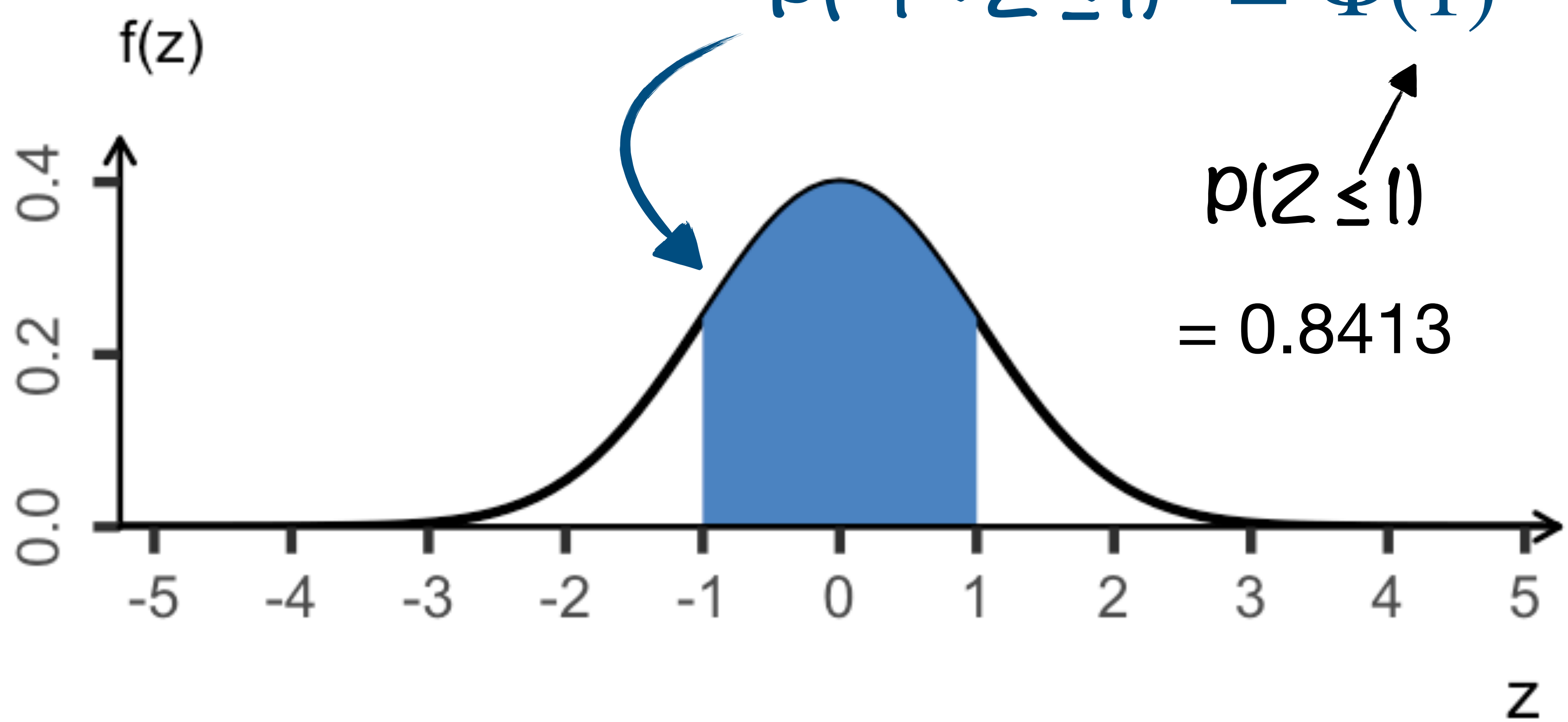
Standard normalfordelingen

Def:

En normalfordelt stokastisk variabel Z med forventningsverdi 0 og standardavvik 1 kalles *standard normalfordelt*

$$Z \sim N(0, 1) \qquad\qquad P(Z \leq z) = \Phi(z)$$

$$p(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$$



$p(Z \leq 1)$

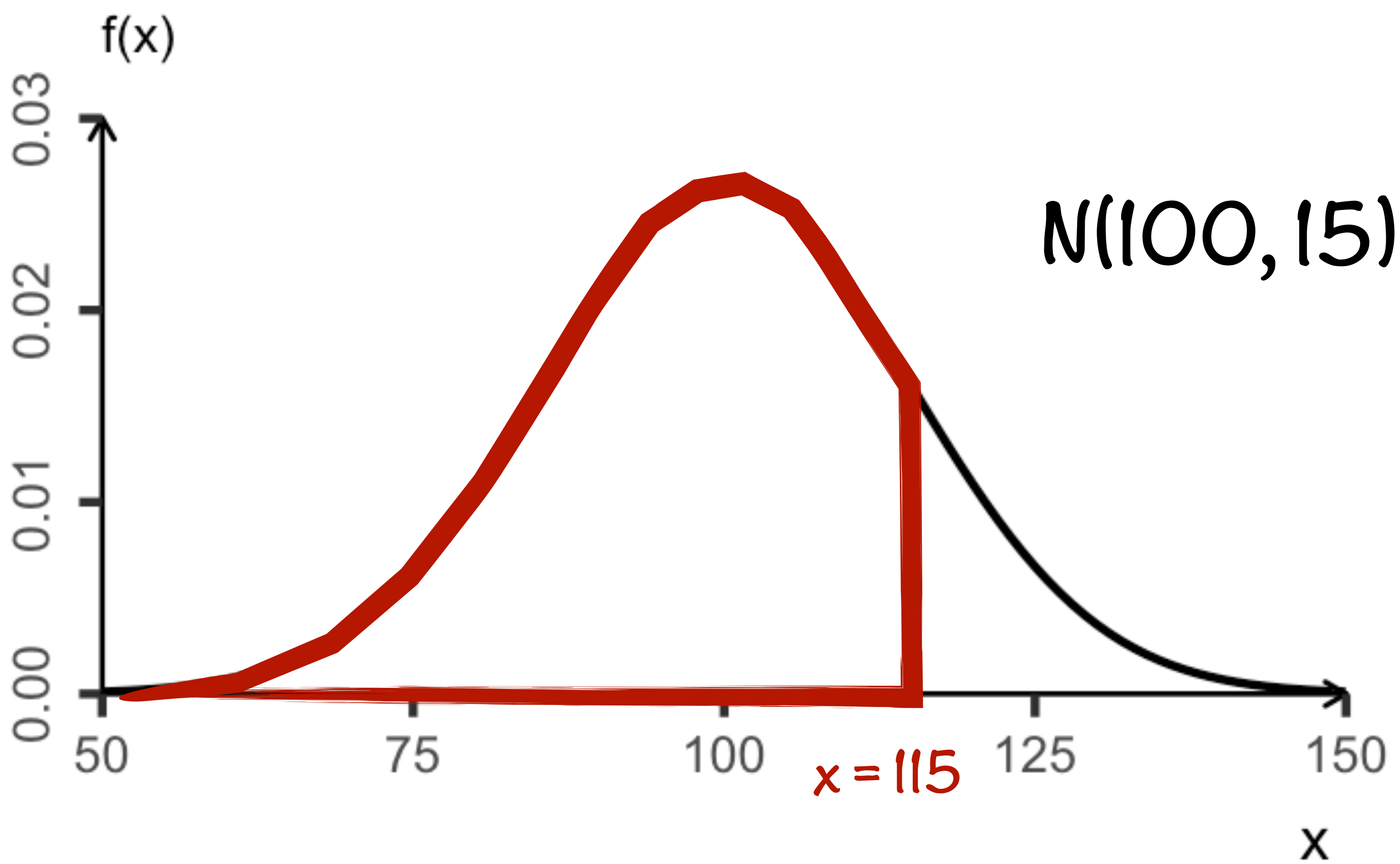
$= 0.8413$

$p(Z \leq -1)$

$= 0.1587$

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



$p(X \leq 115) = ?$

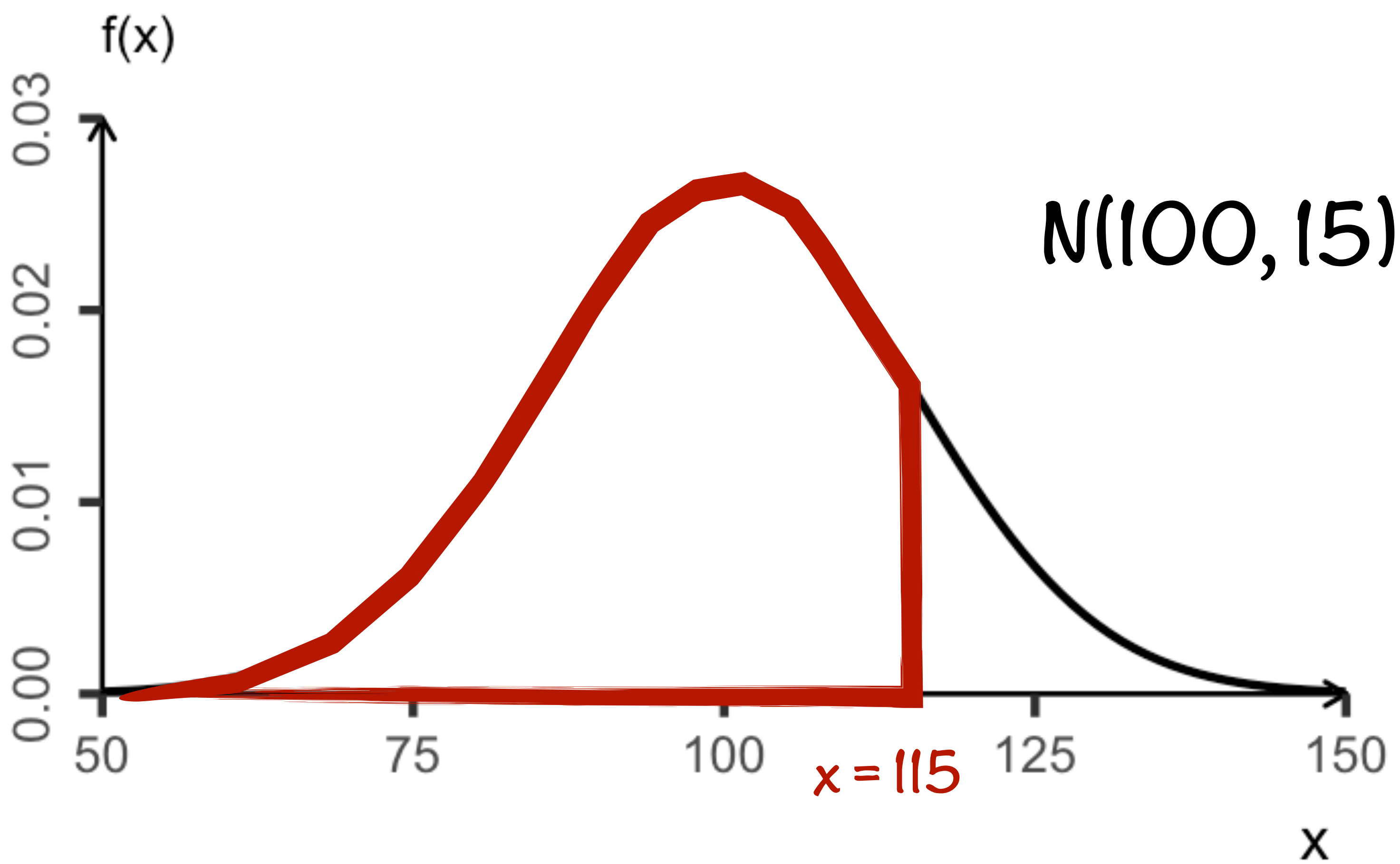
```
from scipy import stats
```

```
stats.norm.cdf(115,100,15)
```

```
0.841344746068543
```

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



$P(X \leq 115) = ?$

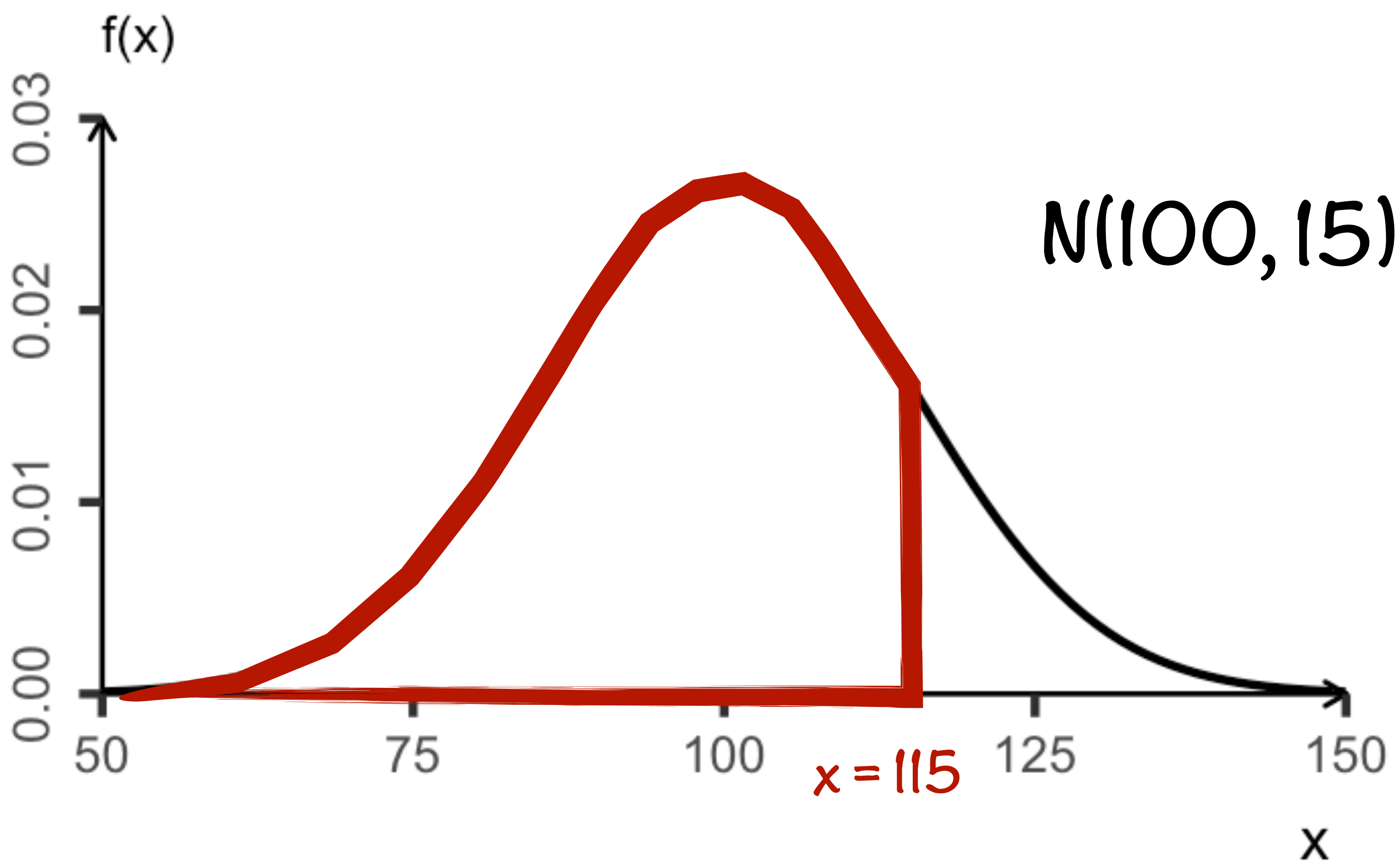
Regnetriks: "Gjør om til " standard normalfordeling

- Trekke fra forventningsverdi
- Dele på standardavvik

... på begge sider av ulikhetstegnet!!

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



$$P(X \leq 115) = P\left(\frac{X-100}{15} \leq \frac{115-100}{15}\right)$$

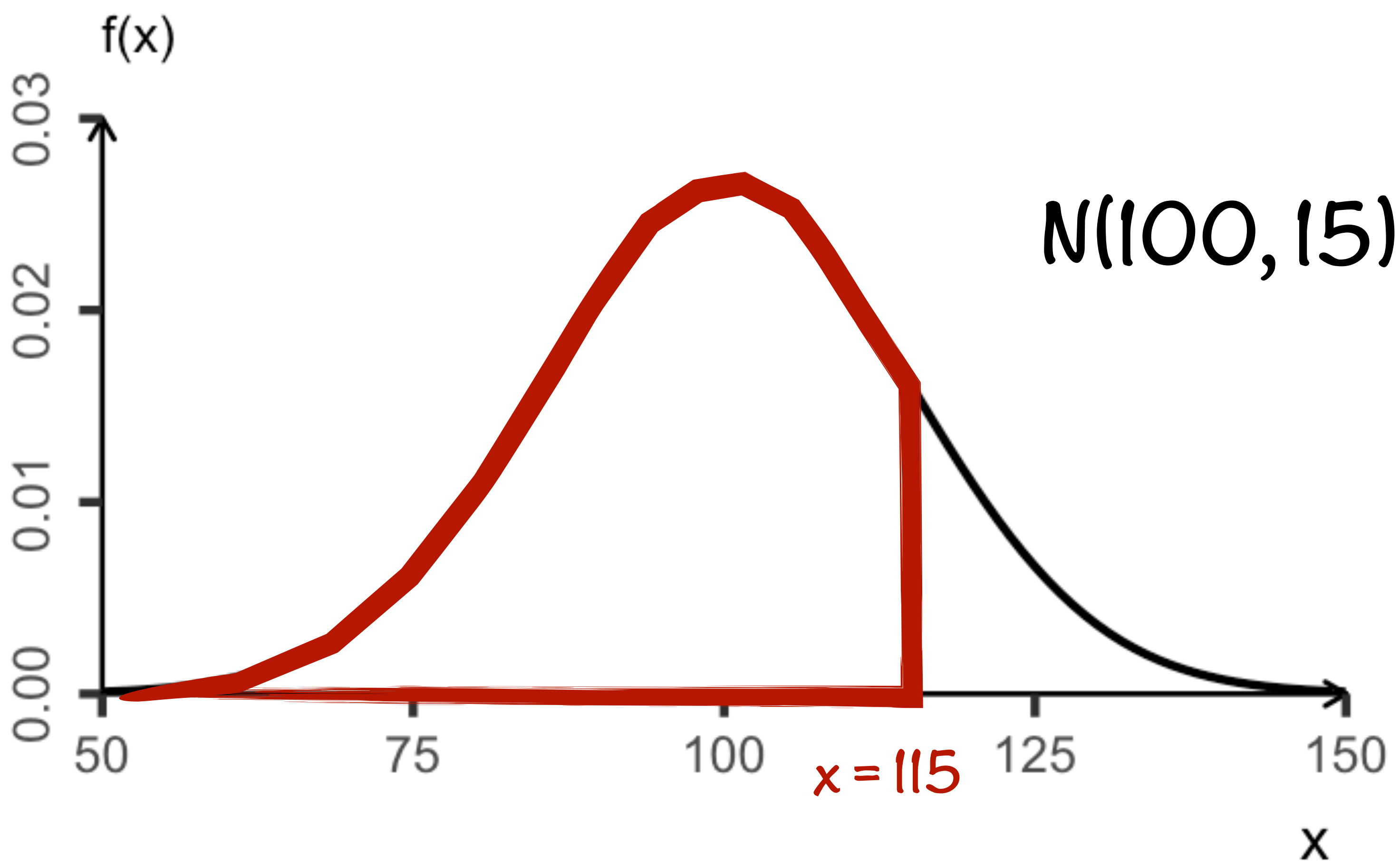
- Trekke fra forventningsverdi
- Dele på standardavvik

$$Z \sim N(0,1)$$

... på begge sider av ulikhetstegnet!!

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



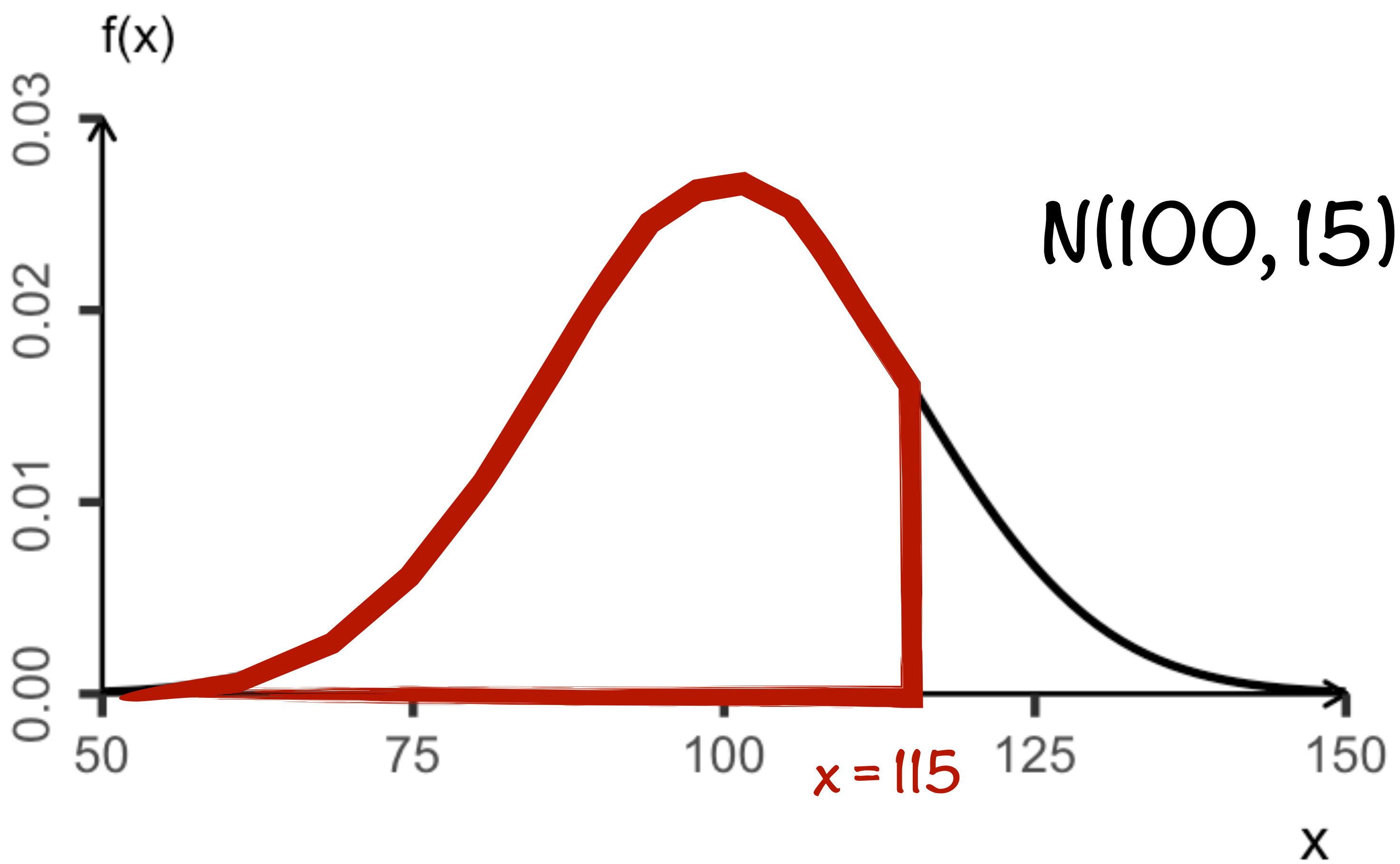
$$P(X \leq 115) = P\left(Z \leq \frac{115 - 100}{15}\right)$$

- Trekke fra forventningsverdi
- Dele på standardavvik

... på begge sider av ulikhetstegnet!!

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



$$P(X \leq 115) = \Phi\left(\frac{115 - 100}{15}\right)$$

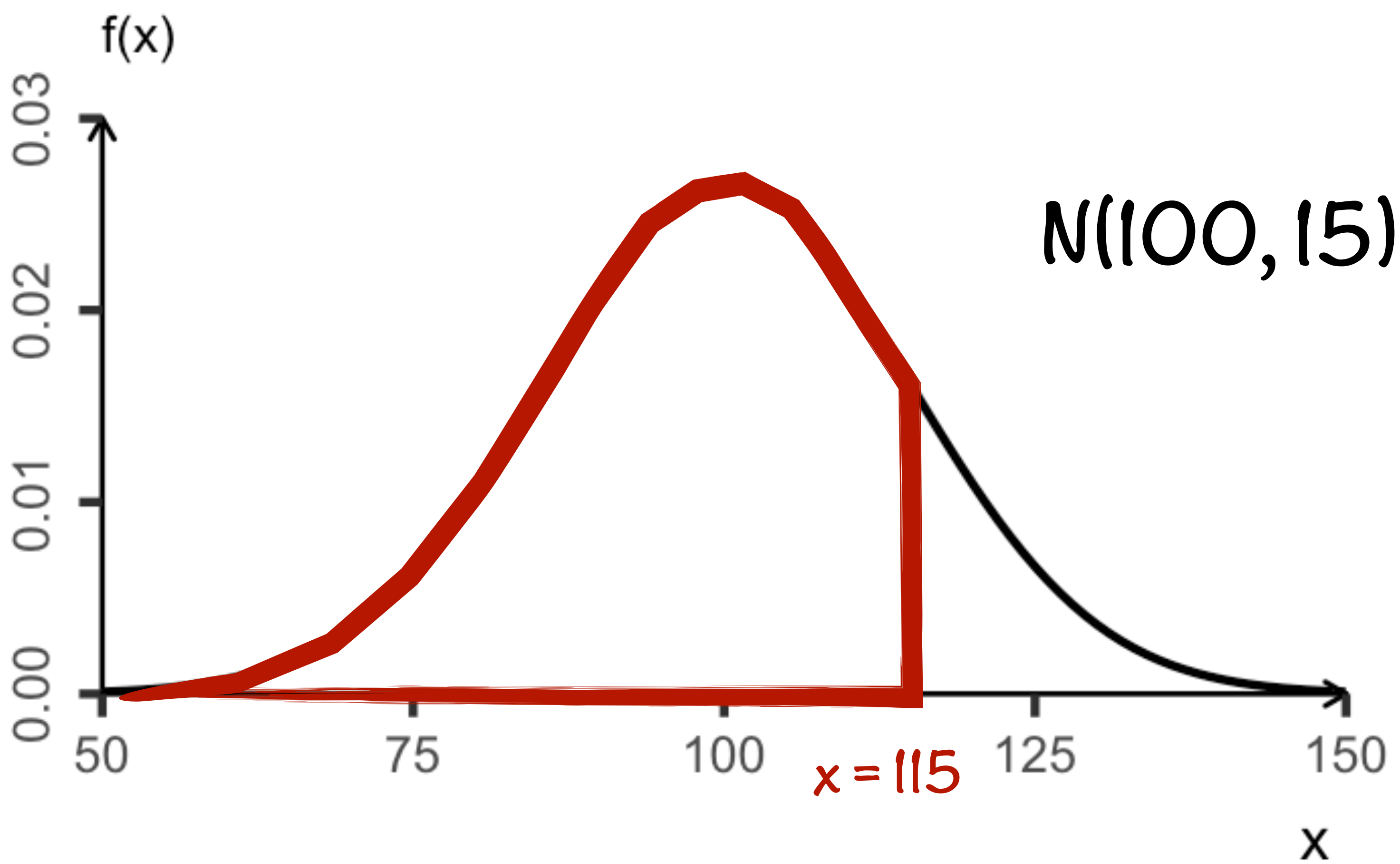
- Trekke fra forventningsverdi
- Dele på standardavvik

$$= \Phi\left(\frac{15}{15}\right) \quad = \Phi(1) \quad \approx 0.84$$

... på begge sider av ulikhetstegnet!!

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



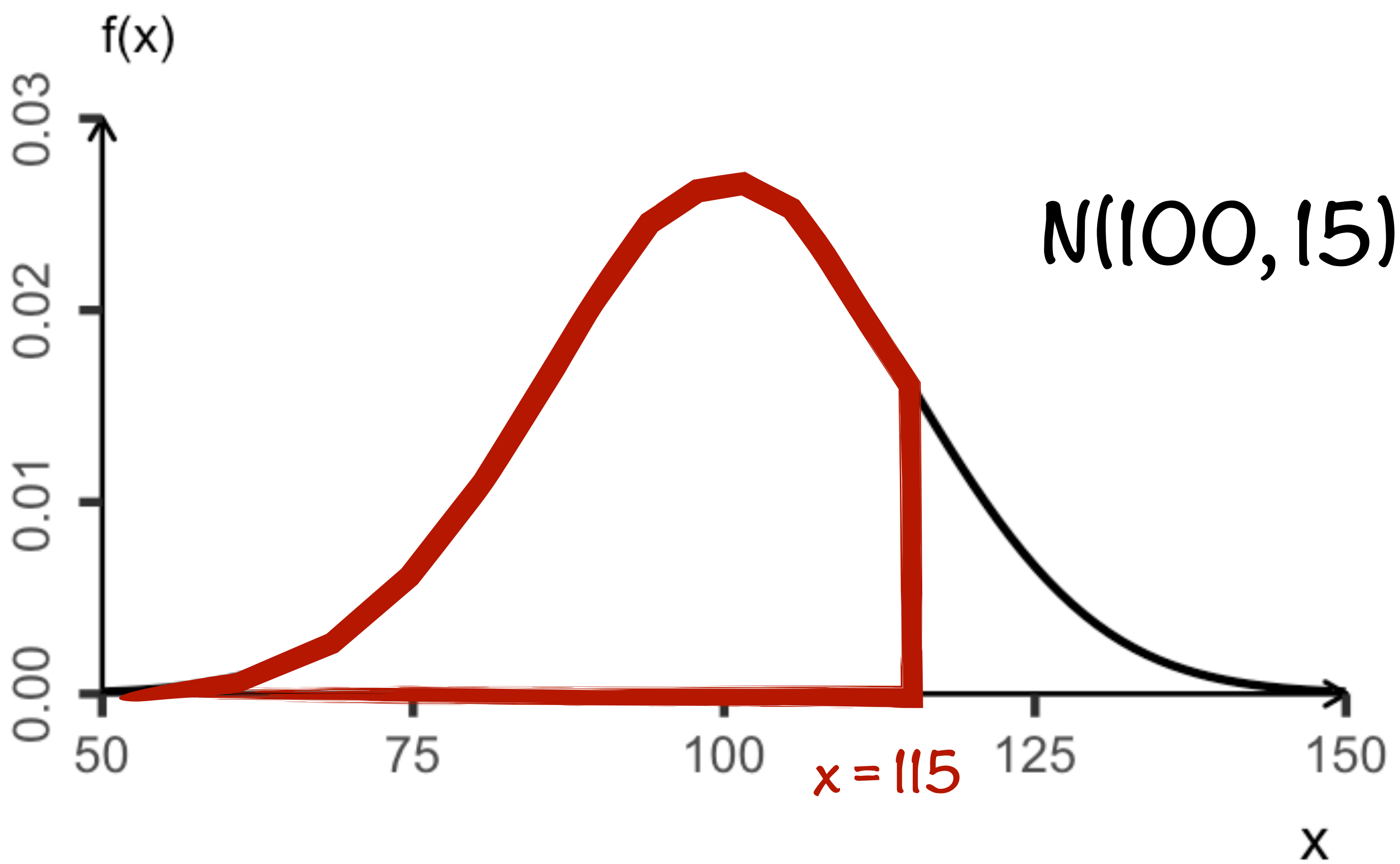
$P(85 < X \leq 115) = ?$

- Trekke fra forventningsverdi
- Dele på standardavvik

... i alle ledd i ulikheten!!

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/

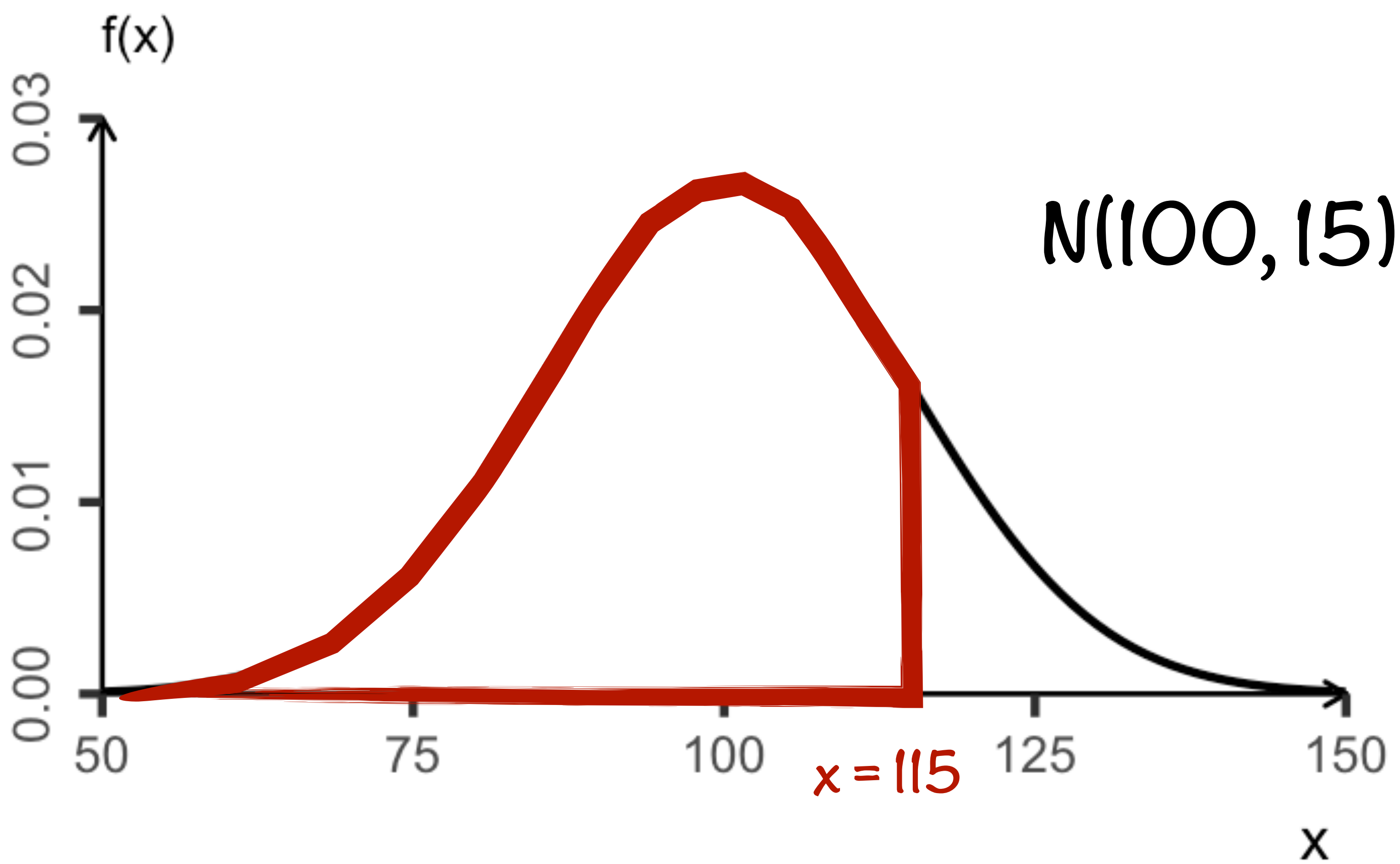


$$P(85 < X \leq 115) = P\left(\frac{85-100}{15} < \frac{X-100}{15} \leq \frac{115-100}{15}\right)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/

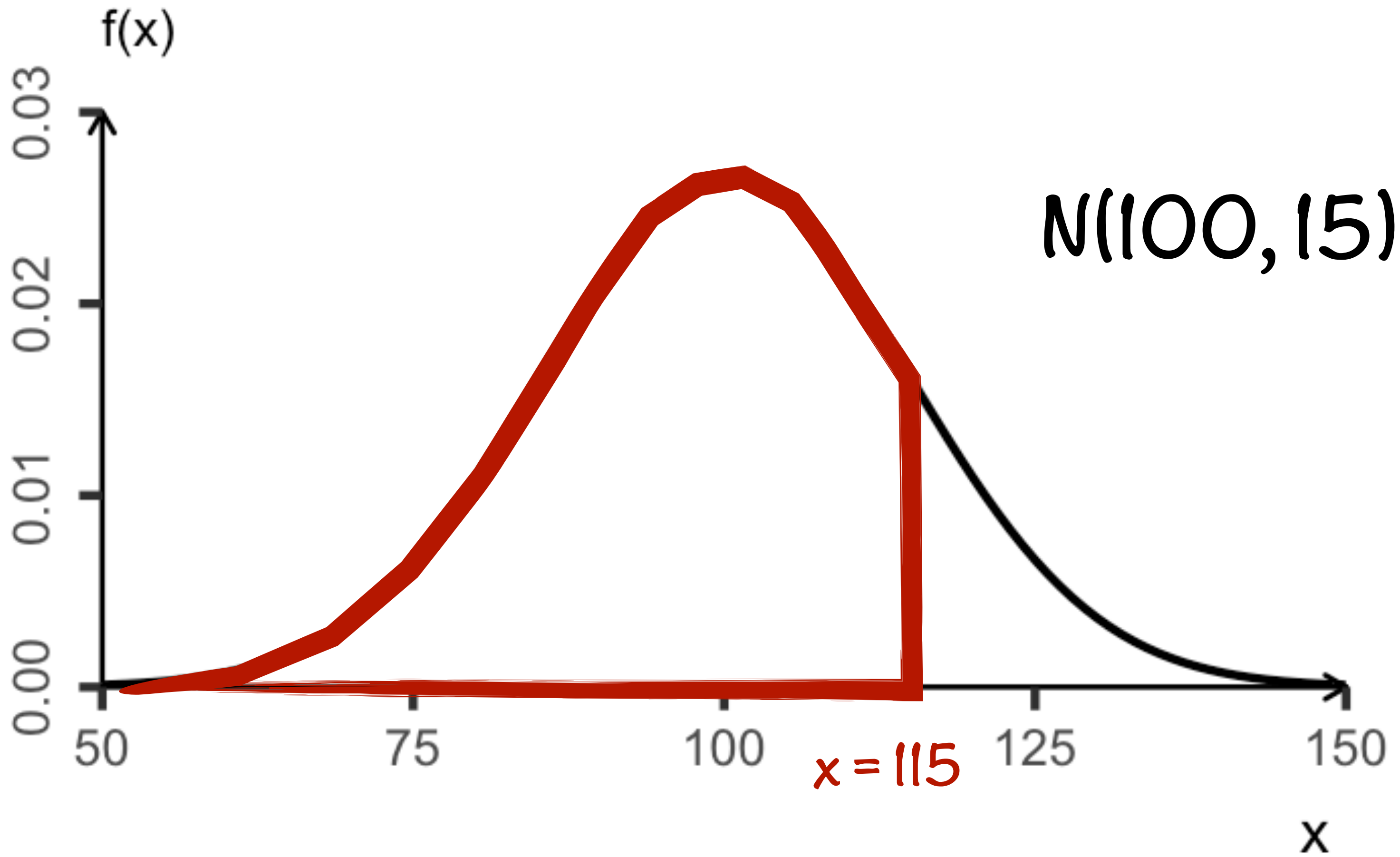


$$P(85 < X \leq 115) = P\left(\frac{85-100}{15} \leq Z \leq \frac{115-100}{15}\right)$$

$$= -1 \qquad\qquad = 1$$

Eksempel: IQ

Kilder: https://snl.no/IQ og https://www.mensa.no/iq/



$$P(85 < X \leq 115) = P\left(\frac{85-100}{15} < Z \leq \frac{115-100}{15}\right)$$

$$= P(-1 < Z \leq 1) \quad = \Phi(1) - \Phi(-1) \quad \approx 0.68$$

Obs!

Dersom X er en normalfordelt stokastisk variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ så er

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$

Sannsynligheten for at X tar en verdi
innenfor + / - ett standardavvik fra forventningsverdien

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

Sannsynligheten for at X tar en verdi
innenfor + / - to standardavvik fra forventningsverdien