Lineærkombinasjoner og sentralgrenseteoremet

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Rep: Forventning og varians av lineærkombinsjoner

Stokastiske variabler

Lineærkombinasjon: $X + Y$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + \cancel{2 \cdot Cov(X,Y)}$$

= 0 dersom X og Y er uavhengige

Lineærkombinasjoner i normalfordelingen

La X og Y være uavhengige ***normalfordelte*** stokastiske variabler

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \qquad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

Lineærkombinasjon: $X + Y$

$$E(X+Y) = \mu_x + \mu_y \qquad Var(X+Y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$\longrightarrow$ $X + Y$ er også normalfordelt!

$$X + Y \sim N\left(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right)$$

Lineærkombinasjoner i normalfordelingen

La X og Y være uavhengige ***normalfordelte*** stokastiske variabler

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x) \qquad Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

Lineærkombinasjon: $X + Y$

$$2X + 3Y$$

$$X - Y$$

$$5X - 2Y$$

Alle lineærkombinasjoner av uavhengige normalfordelte variabler er normalfordelte!!

Nyttig resultat

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1,\ldots,n$$

Samme forventningsverdi og varians (og standardavvik)

Nyttig resultat

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1,\dots,n$$

Sum:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad E(Y) = ? \qquad Var(Y) = ?$$

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$= \mu + \mu + \cdots + \mu$$

$$= n\mu$$

Nyttig resultat

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Sum:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad E(Y) = n\mu \qquad Var(Y) = ?$$

$$SD(Y) = \sqrt{n}\sigma$$

$$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2$$

$$= n\sigma^2$$

Nyttig resultat

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1,\ldots,n$$

Sum:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad E(Y) = n\mu \qquad Var(Y) = n\sigma^2$$

$$SD(Y) = \sqrt{n}\sigma$$

$$Y \sim N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

Sentralgrenseteoremet (del 1)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige*** ~~***normalfordelte***~~ stokastiske variabler der

n > 30 $\quad E(X_i) = \mu$ og $Var(X_i) = \sigma^2$ for alle $i = 1,\ldots,n$

Sum:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad E(Y) = n\mu \qquad Var(Y) = n\sigma^2$$

$$SD(Y) = \sqrt{n}\sigma$$

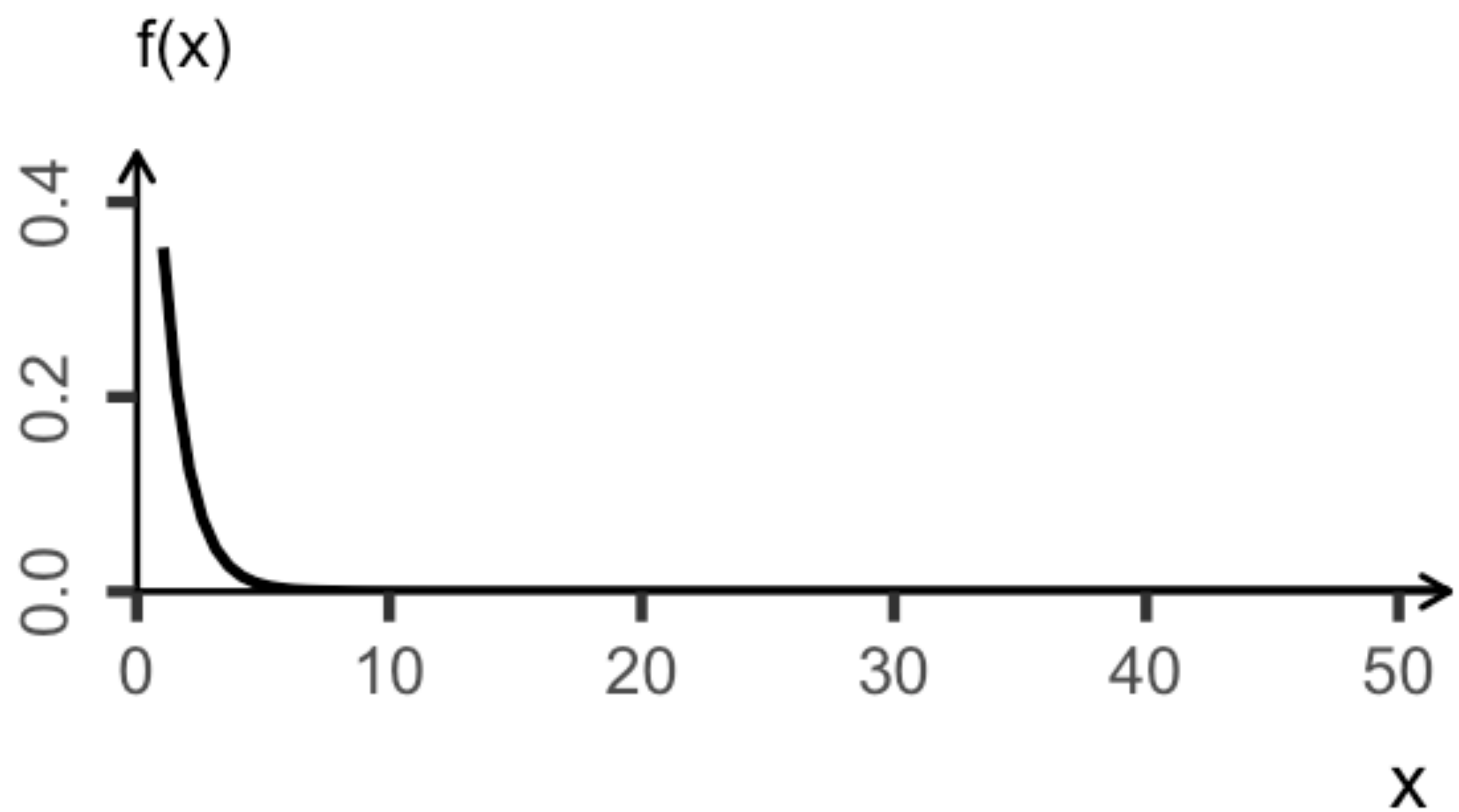
$$Y \sim N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

Tilnærmet

Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim$ eksponential(1) $\quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

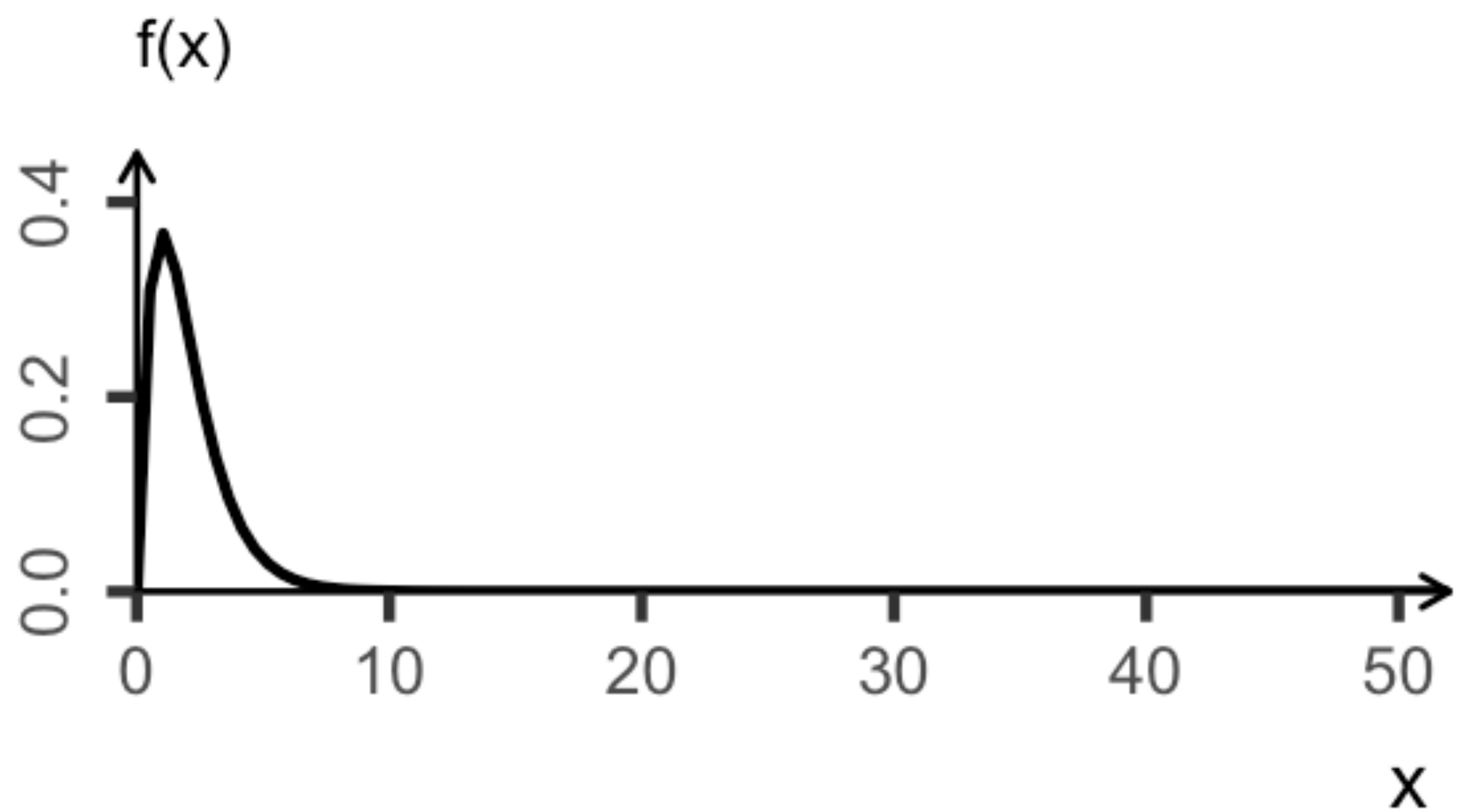


Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim \text{eksponential}(1) \quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

$X_1 + X_2$

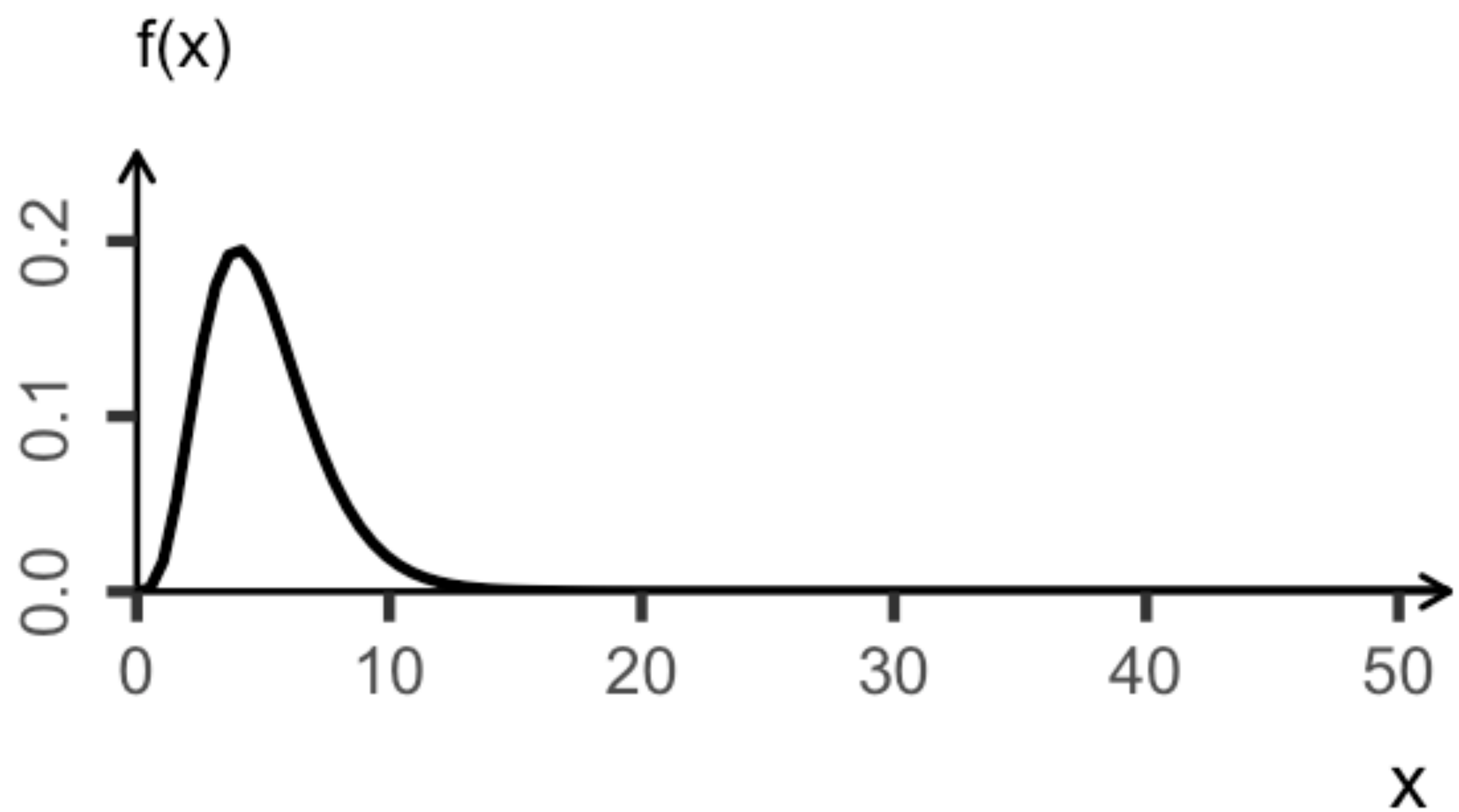


Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim \text{eksponential}(1) \quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

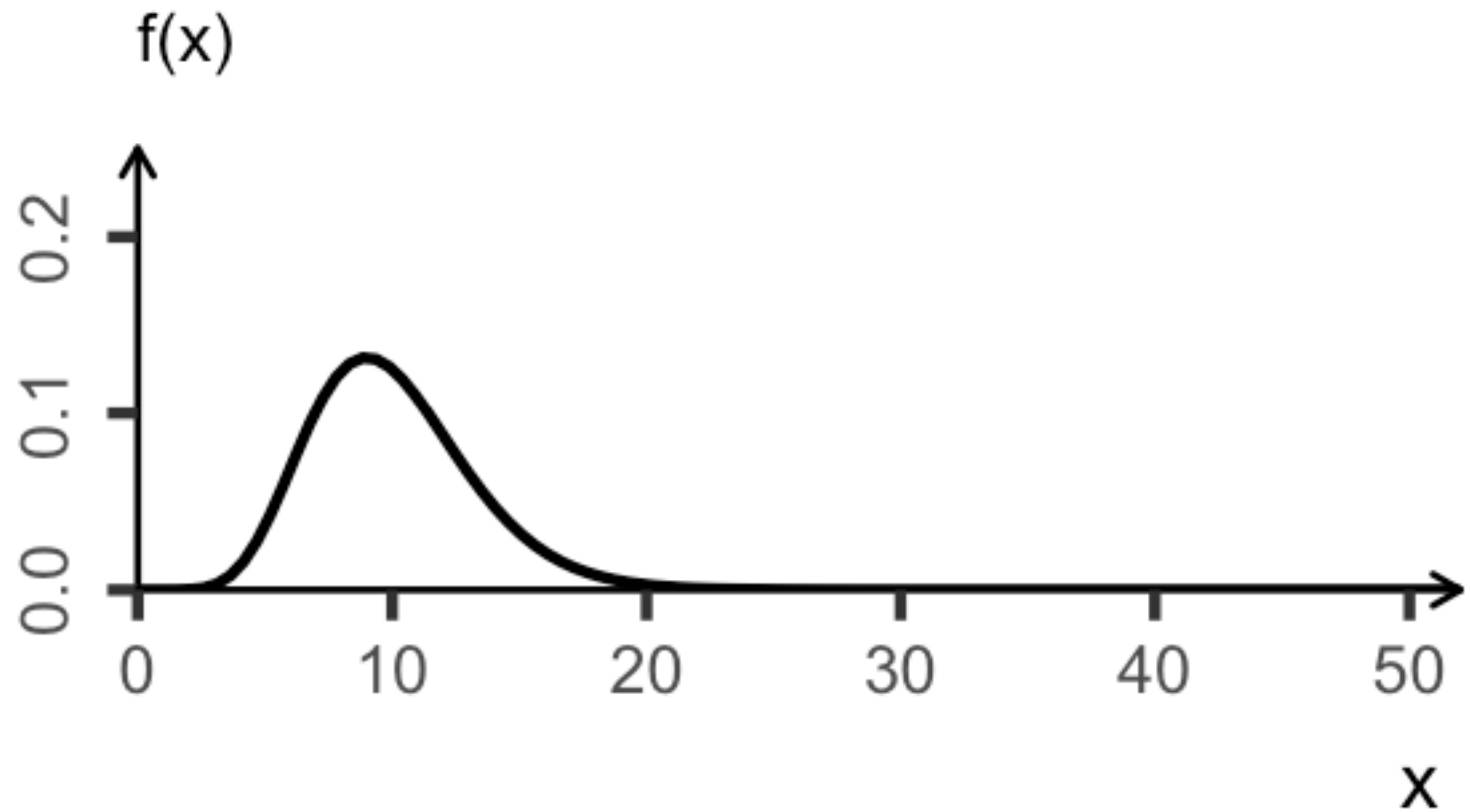


Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim$ eksponential(1) $\quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$$

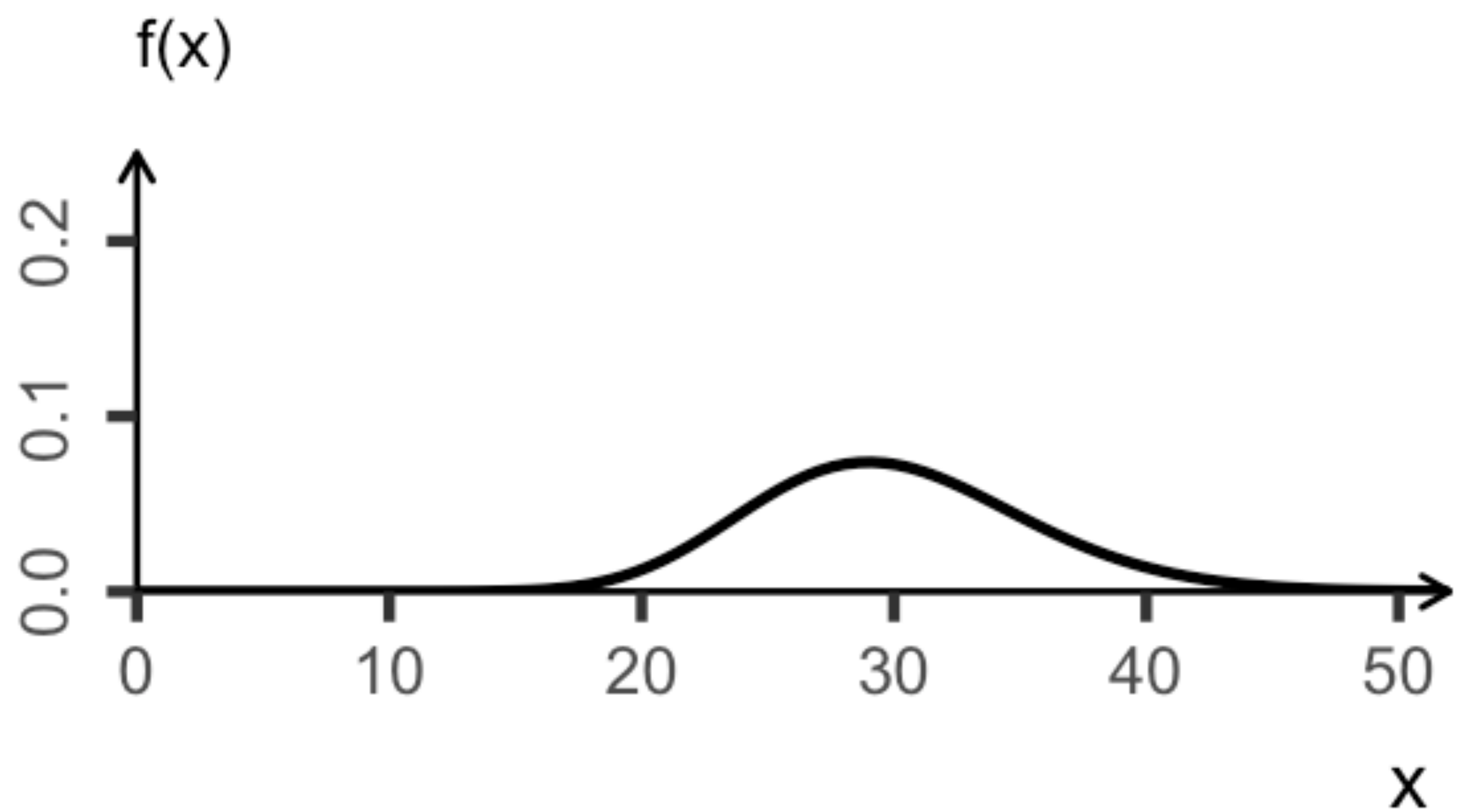


Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim$ eksponential(1) $\quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

$X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}$



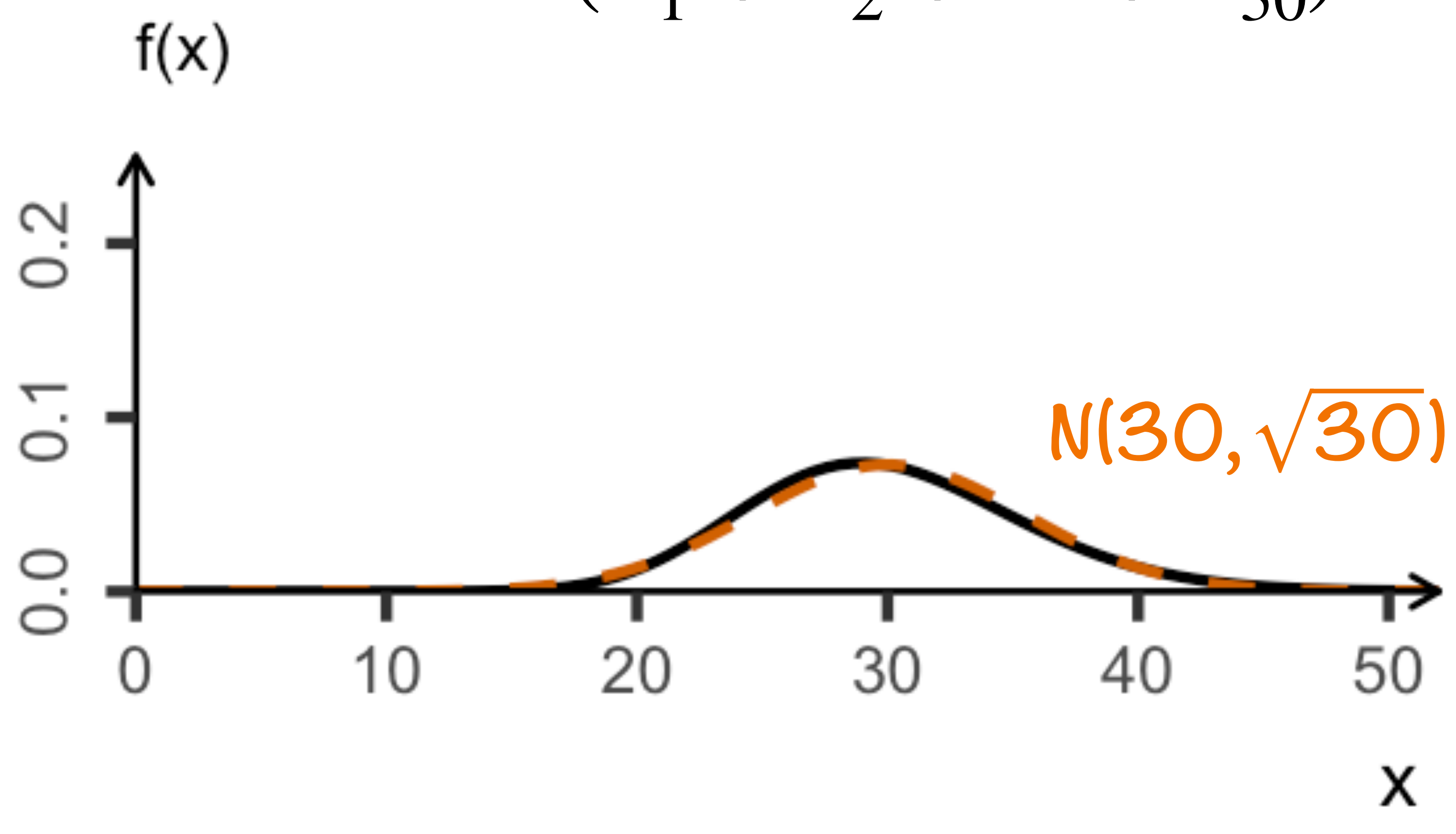
Sentralgrenseteoremet (del 1)

Eksempel

$X_i \sim \text{eksponential}(1) \quad E(X_i) = 1 \quad Var(X_i) = 1 \quad SD(X_i) = 1$

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_{30} \qquad E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}) = 30 \cdot 1 = 30$$

$$SD(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}) = \sqrt{30} \cdot 1 = \sqrt{30}$$



Nyttig resultat (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Samme forventningsverdi og varians (og standardavvik)

Nyttig resultat (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad E(\bar{X}) = ? \qquad Var(\bar{X}) = ?$$

Hjelpestørrelse: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad E(Y) = n\mu$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} Y \qquad E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}Y\right) = \frac{1}{n}E(Y) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

Nyttig resultat (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1,\ldots,n$$

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad E(\bar{X}) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \,?$$

Hjelpestørrelse: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $\quad Var(Y) = n\sigma^2$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}Y \qquad Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}Y\right) = \frac{1}{n^2}Var\,(Y) = \frac{1}{n^2}\,n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Nyttig resultat (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Hjelpestørrelse: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Normalfordelt

$$\bar{X} = \frac{1}{n} Y$$

Nyttig resultat (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige normalfordelte*** stokastiske variabler der

$$E(X_i) = \mu \quad \text{og} \quad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad \text{for alle } i = 1, \ldots, n$$

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sentralgrenseteoremet (del 2)

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være n ***uavhengige*** ~~***normalfordelte***~~ stokastiske variabler der

n > 30 $\quad E(X_i) = \mu$ og $Var(X_i) = \sigma^2$ for alle $i = 1, \ldots, n$

Gjennomsnitt:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad E(\bar{X}) = \mu \qquad Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Tilnærmet