Punktestimering i normalfordelingen

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Estimere parameterne μ og σ i normalfordelingen

En sjokoladefabrikk har kjøpt en ny maskin for å lage sjokoladeplater.

Vekten til en sjokoladeplate som denne maskinen produserer
kan betraktes som en normalfordelt stokastisk variabel:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Ukjente parameterverdier

Vekt til tilfeldig
valgt sjokoladeplate

Et utvalg

Fabrikken velger tilfeldig ut 5 sjokoladeplater som de veier,
og ønsker å bruke disse målingene til å anslå μ og σ.

Populasjonen
av alle sjokoladeplater

Forventningsverdien μ i normalfordelingen

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$$

5 uavhengige normalfordelte stokastiske variabler
som representerer vekten til 5 sjokoladeplater

"et tilfeldig utvalg fra en $N(\mu, \sigma)$ - populasjon"

$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$

$$i = 1, \ldots, 5$$

samme fordeling

Forventningsverdien μ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma)$$
$$i = 1,\ldots,5$$

Forventningsverdien μ i normalfordelingen

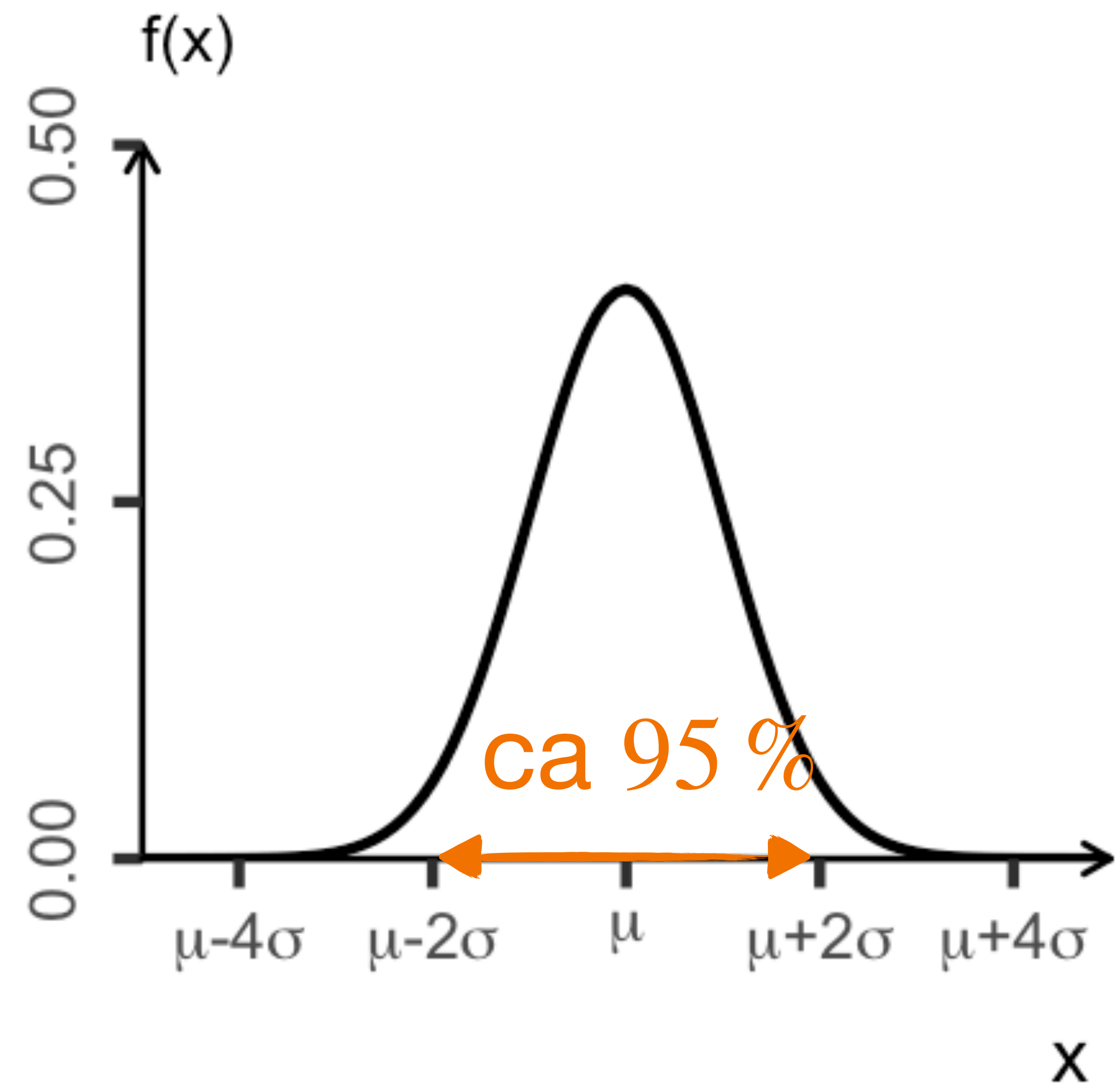
1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

2. Vi gjør målinger av disse n = 5 platene

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

Hvilke verdier kan vi observere når vi gjør målinger?



Forventningsverdien μ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

2. Vi gjør målinger av disse n = 5 platene

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

99.7g, 98.7g, 98.1g, 99.1g, 98.4g

3. Vi estimerer forventningsverdien μ

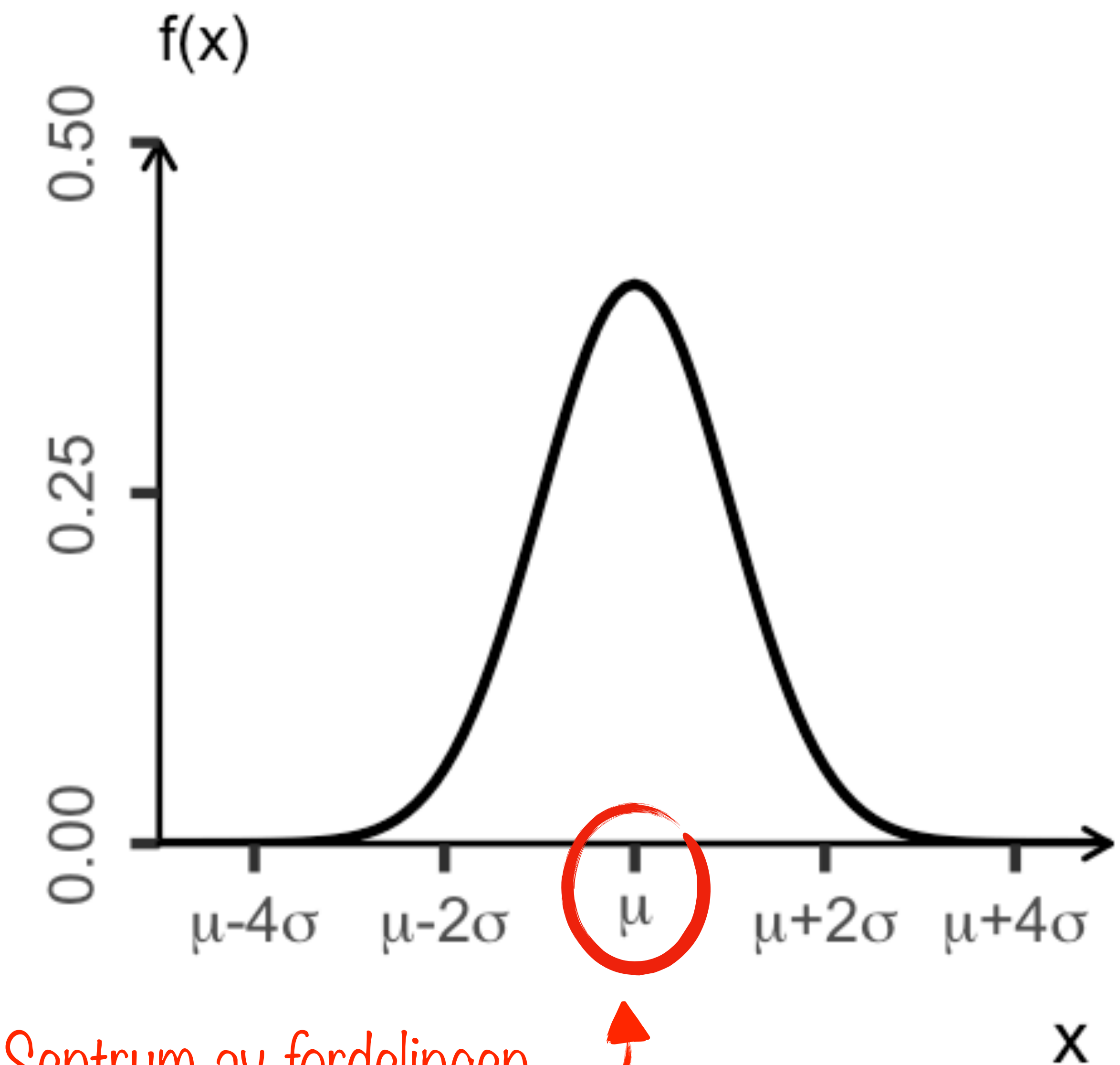
Sentrum av datasettet:

$\bar{x} = 98.8$ g

$\hat{\mu}$

Median?

$m = 98.7$ g



Sentrum av fordelingen

Forventningsverdien μ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

n = 5

"Estimator for μ"

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Forventningsrett!

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$\bar{X}$ har lavere varians enn medianen

Variansen til $\bar{X}$ blir mindre jo større utvalg vi har!

Standardavviket σ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

2. Vi gjør målinger av disse n = 5 platene

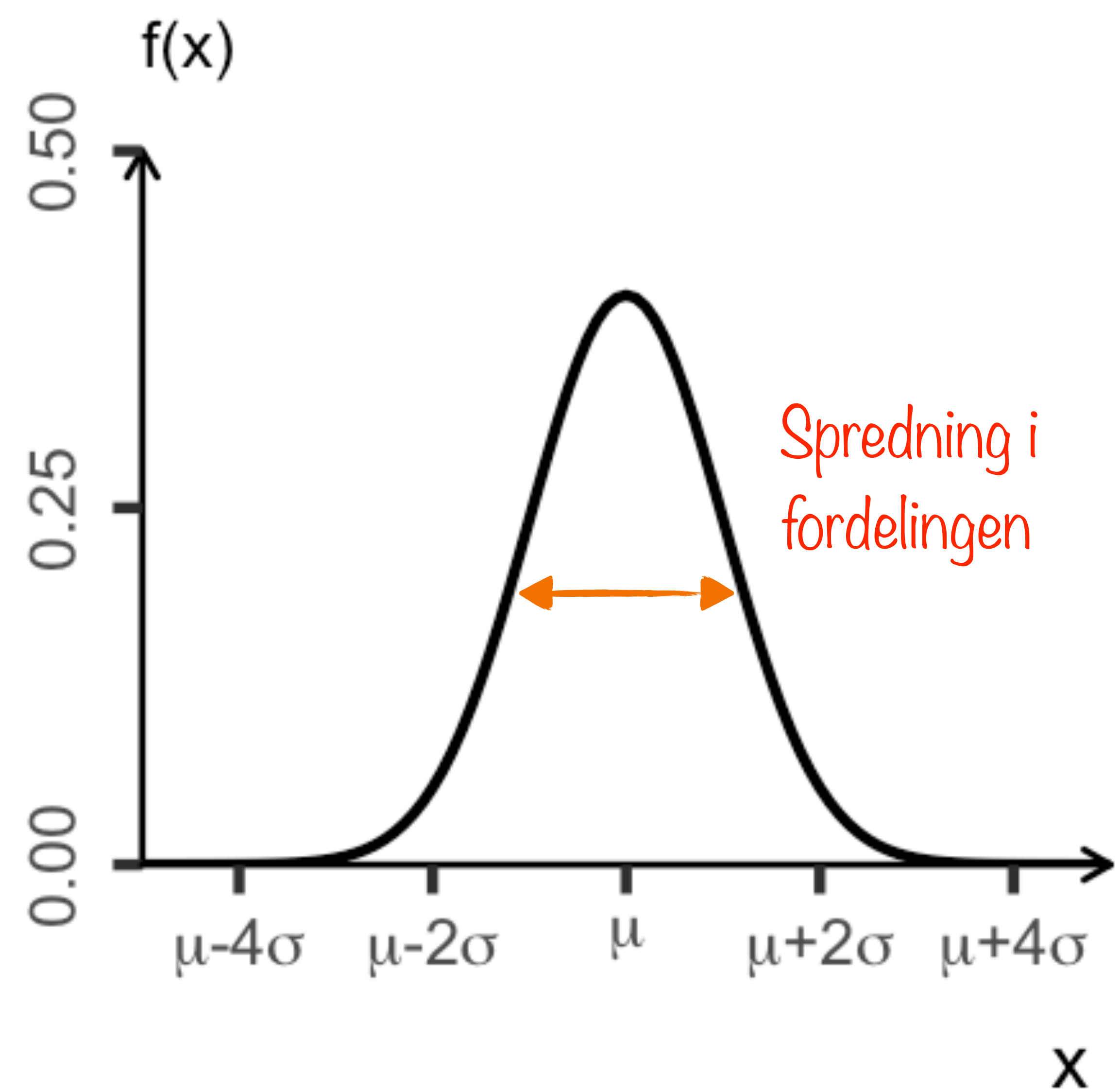
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

99.7g, 98.7g, 98.1g, 99.1g, 98.4g

4. Vi estimerer standardavviket σ

Spredning i datasettet:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}}$$



Standardavviket σ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

$$\sigma^2 = Var(X_i) = E((X_i - \mu)^2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n} \qquad E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$$

Ikke forventningsrett!

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \qquad E(S^2) = \sigma^2$$

Forventningsrett!

Estimator for standardavviket: $S = \sqrt{S^2}$

Standardavviket σ i normalfordelingen

1. Vi ser på et tilfeldig utvalg av n = 5 sjokoladeplater

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \quad i = 1,\ldots,5$$

2. Vi gjør målinger av disse n = 5 platene

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$$

99.7g, 98.7g, 98.1g, 99.1g, 98.4g

4. Vi estimerer standardavviket σ

Spredning i datasettet:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5-1}} = 0.62$$