Konfidensintervaller i normalfordelingen (del 2)

Thea Bjørnland
Institutt for matematiske fag
NTNU

Repetisjon:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ

når standardavviket σ er kjent

Ukjent standardavvik!

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ $\qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

"Standardfeilen til estimatoren"

$SE(\bar{X})$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad Z \sim N(0,1)$$

$\alpha = 0.05$

$z_{0.025} = 1.96$

(1-α)100% konfidensintervall for μ:

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

95%

Resultat:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ
når standardavviket σ er *ukjent*

$$X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad Z \sim N(0,1)$$

Resultat:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ
når standardavviket σ er *ukjent*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

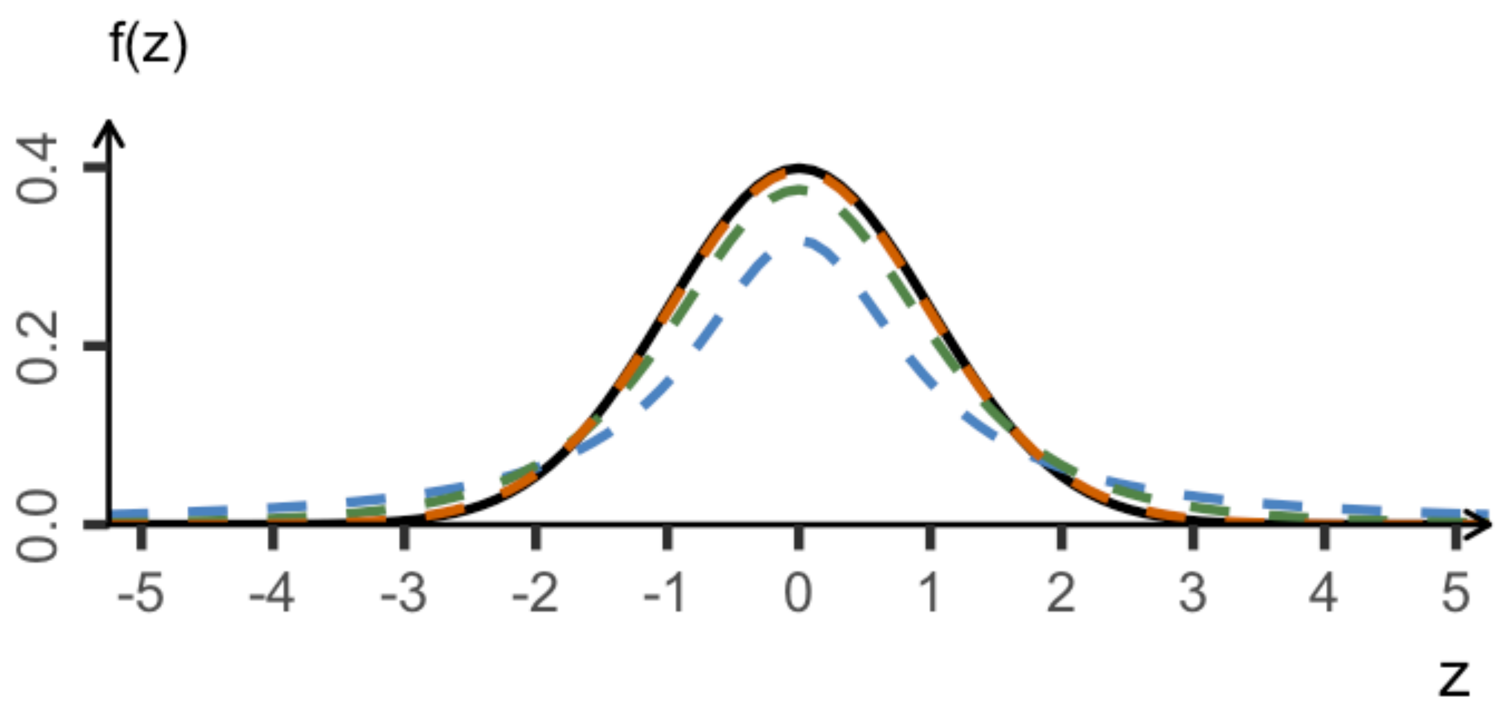
Resultat:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ
når standardavviket σ er *ukjent*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \qquad T \sim t_{n-1}$$

$\nu = n - 1$



$\nu = 30$

$\nu = 4$

$\nu = 1$

Resultat:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ
når standardavviket σ er *ukjent*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \qquad T \sim t_{n-1}$$

(1-α)100% konfidensintervall for μ:

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Estimator for μ

Kvantil i t-fordelingen med parameter $\nu = n - 1$

Estimert standardfeil til $\bar{X}$

Resultat:

Konfidensintervall for forventningsverdien μ
når standardavviket σ er *ukjent*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \qquad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \qquad T \sim t_{n-1}$$

(1-α)100% konfidensintervall for μ:

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,\,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t_{n-1,\,\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

$\approx z_{\alpha/2}$ når n > 30

Kvantil i t-fordelingen med parameter $\nu = n - 1$