Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, eksamn MA0001 27.05.2008

Oppgave 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-3)}{(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3/n}{(1-1/n)^2} = \frac{1}{1} = 1.$$
$$\lim_{n\to 0} \frac{n(n-3)}{(n-1)^2} = \frac{0(0-3)}{(-1)^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Oppgave 2 Vi setter $u = e^x$ inn i ligningen:

$$u^2 - 2u - 3 = 0.$$

Denne ligningen har løsninger

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Siden $u = e^x > 0$ for alle reelle x, kan vi ikke bruke løsningen $u = -1$.

Altså er $u = e^x = 3$, og derved $x = \ln 3$.

Oppgave 3

80 km/time

x

y

60 km/time

s

Etter t sekunder $= (t/3600)$ timer har den østgående bilen kjørt

$$x(t) = 80 \cdot \frac{t}{3600}\,\text{km} = \frac{t}{45}\,\text{km}$$

og den sydgående bilen kjørt

$$y(t) = 60 \cdot \frac{t}{3600}\,\text{km} = \frac{t}{60}\,\text{km}$$

slik at avstanden mellom dem er

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{45}\right)^2 t^2 + \left(\frac{1}{60}\right)^2 t^2} \\ &= \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{15^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}}\, t\,\text{km} = \frac{5t}{15 \cdot 3 \cdot 4}\,\text{km} = \frac{t}{36}\,\text{km}. \end{aligned}$$

Avstanden $s(t)$ øker med hastighet

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{36}\,\text{km/sekund} = \frac{3600}{36}\,\text{km/time} = 100\,\text{km/time}.$$

$$v(30) = 100\,\text{km/time}.$$

Hastigheten $v(t)$ øker *ikke* raskere og raskere. Avstanden mellom bilene øker faktisk med konstant hastighet $100\,\text{km/time}$.

Oppgave 4

$$P(t) = e^t \sin t \qquad \text{for} \quad 0 \le t \le 3\,\text{år}.$$

a) Randpunkter:

$$P(0) = e^0 \sin 0 = 1 \cdot 0 = 0, \qquad P(3) = e^3 \sin 3 \approx 2.83.$$

Kritiske punkter:

$$P'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = 0$$

der $e^t \neq 0$ for alle t. Derfor er $\sin t + \cos t = 0$, det vil si

$$\begin{aligned} \sin t &= -\cos t \\ \tan t &= -1 \\ t &= 3\pi/4 \approx 2.356 \end{aligned}$$

som gir $P(3\pi/4) = e^{3\pi/4} \sin(3\pi/4) = \dfrac{e^{3\pi/4}}{\sqrt{2}} \approx 7.46.$

Populasjonen er derfor størst for $t = 3\pi/4$.

b) Populasjonen vokser med hastighet $P'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$.

Randpunkter:

$P'(0) = e^0 \sin 0 + e^0 \cos 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1, \qquad P'(3) = e^3 \sin 3 + e^3 \cos 3 \approx 2.83 + (-19.88) = -17.05.$

Kritiske punkter:

$$P''(t) = e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t = 0$$

der $e^t \neq 0$ for alle t. Derfor må $\cos t = 0$, det vil si $t = \pi/2$, og

$$P'(\pi/2) = e^{\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} + e^{\pi/2} \cos \frac{\pi}{2} = e^{\pi/2} \cdot 1 + e^{\pi/2} \cdot 0 = e^{\pi/2} \approx 4.81.$$

Populasjonen er øker derfor raskest når $t = \pi/2$.

c) Gjennomsnittlige populasjonsstørrelse over de tre årene er

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_0^3 P(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^t \sin t\,dt &= \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{2}(e^t \sin t - e^t \cos t)\Big]_0^3 \\
&= \frac{1}{6}((e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3) - (e^0 \sin 0 - e^0 \cos 0)) \\
&= \frac{1}{6}((e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3) - (0 - 1)) \\
&= \frac{1}{6}(e^3 \sin 3 - e^3 \cos 3) + 1) \approx 3.95.
\end{aligned}$$

d) Fra a): Maksimal populasjon: $P_{\text{max}} \approx 7.46$.

Fra c): Gjennomsnittlig populasjon: $\overline{P} \approx 3.95$.

Den maksimale populasjonen er derfor $P_{\text{max}} - \overline{P} \approx 3.51$ over gjennomsnittet.

I prosent av gjennomsnittet blir det

$$\frac{P_{\text{max}} - \overline{P}}{\overline{P}} \cdot 100\,\% \approx \frac{3.51}{395} \cdot 100\,\% \approx 89\,\%.$$

Oppgave 5 Vi lar r betegne radien i kulen. Da er

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{og} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

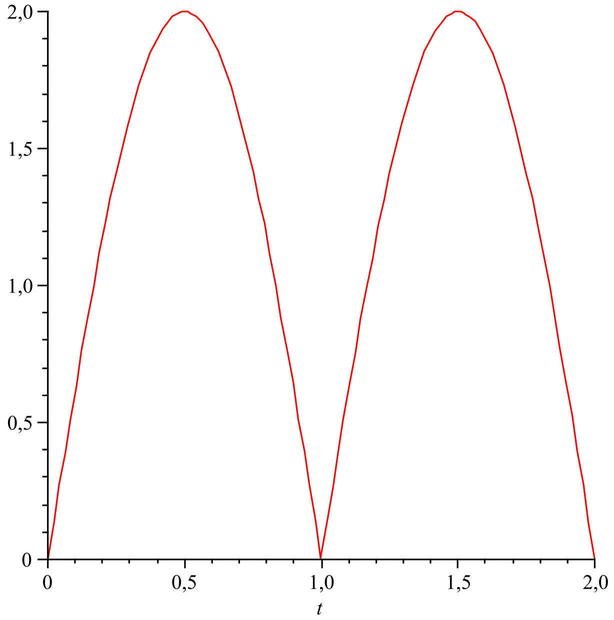
Siden V skal skrives som en funksjon av A og ikke av r, må vi prøve å uttrykke r ved hjelp av A og sette inn i uttrykket for V.

Av uttrykket for A får vi at $r^2 = A/(4\pi)$, slik at $r = \sqrt{A/(4\pi)}$.

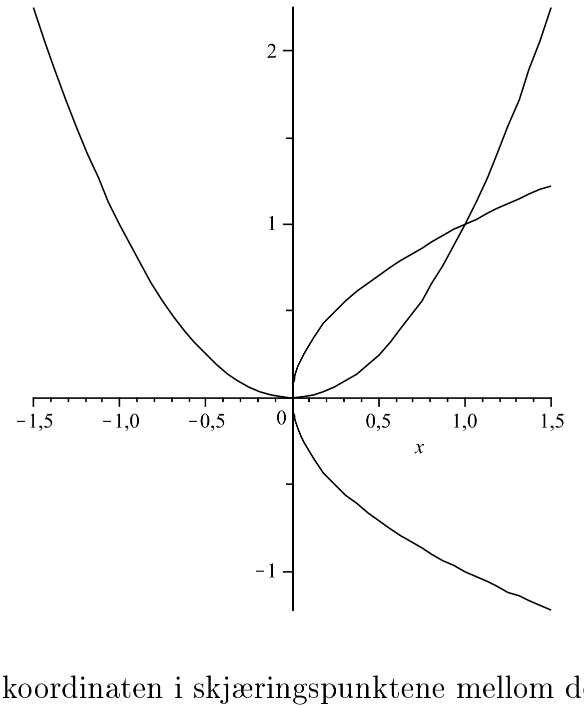
Innsatt i V gir det

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{A}{4\pi}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{A^{3/2}}{8\pi\sqrt{\pi}} = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}.$$

Oppgave 6



Oppgave 7



x-koordinaten i skjæringspunktene mellom de to kurvene:

$$y = x^2 = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x^4 = x \quad \Rightarrow \quad x = 0, \;\; x = 1.$$

Arealet av det begrensede området er derved

$$\int_0^1 (y_{\text{oppe}} - y_{\text{nede}})dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$