Oppgave 1.

La T_C, T_F og T_K være temperaturen målt i henholdsvis $°C$, $°F$ og $°K$. Vi vet det er lineær sammenheng mellom de ulike temperaturskalaene. (Kommentar: i anvendelser er det ofte slike betraktninger man må bidra med selv $\dots$.

(a) VET: $T_C = aT_K + b$ for passe valg av konstantene a og b, der

$$\begin{array}{rll} (i) & T_C = 0, \quad T_K = 273.15 & \text{må passe i ligningen og} \\ (ii) & T_C = 100, \ T_K = 373.15 & \text{må passe i ligningen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \text{gir } \ 0 = a \cdot 273.15 + b \\ (ii) \quad & \text{gir } \ 100 = a \cdot 373.15 + b \\ (ii) - (i) \quad & \text{gir } \ 100 = 100a \quad \Longrightarrow \quad a = 1 \\ \text{Innsatt i } (i): \quad & 0 = 273.15 + b \quad \Longrightarrow \quad b = -273.15 \\ \text{Svar:} \quad & T_C = T_K - 273.15 \end{aligned}$$

(b) VET: $T_F = cT_C + d$ for passe valg av konstantene c og d, der

$$\begin{array}{rll} (i) & T_F = 68, \quad T_C = 20 & \text{må passe i ligningen og} \\ (ii) & T_F = 212, \ T_C = 100 & \text{må passe i ligningen} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (i) \quad & \text{gir } \ 68 = c \cdot 20 + d \\ (ii) \quad & \text{gir } \ 212 = c \cdot 100 + d \\ (ii) - (i) \quad & \text{gir } \ 144 = 80c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{144}{80} = \frac{9}{5} \\ \text{Innsatt i } (i): \quad & 68 = \frac{9}{5} \cdot 20 + d = 36 + d \quad \Longrightarrow \quad d = 68 - 36 = 32 \\ \text{Svar:} \quad & T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 \end{aligned}$$

(c) kan regnes på tilsvarende måte.

Alternativt:

$$\text{Fra } \textbf{(a)}: \quad T_K = T_C + 273.15$$

$$\text{Fra } \textbf{(b)}: \quad T_C = (T_F - 32)\frac{5}{9}$$

Derfor er

$$\begin{aligned} T_K = T_C + 273.15 &= \frac{5}{9}(T_F - 32) + 273.15 = \frac{5}{9}(T_F - 32) + \frac{5}{9}(\frac{9}{5} \cdot 273.15) \\ &= \frac{5}{9}(T_F - 32 + 491.67) = \frac{5}{9}(T_F + 459.67) \end{aligned}$$

Kommentar: det er mange måter å presentere svaret på. De vil alle gi full score, bare de er korrekte.

Oppgave 2.

$$
\begin{aligned}
&4x^2+4y^2-4x-4y+1 = 4(x^2-x)+4(y^2-y)+1\\
&= 4(x^2-x+\tfrac{1}{4})-1+4(y^2-y+\tfrac{1}{4})-1+1\\
&= 4(x-\tfrac{1}{2})^2+4(y-\tfrac{1}{2})^2-1=0
\end{aligned}
$$

Det vil si: $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2$ som er en ligning for en sirkel med sentrum i $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og radius $\frac{1}{2}$.

Oppgave 3.

(a) Når man håper å kjenne igjen grafen til $\log_a P_k = f(k)$ som (nesten) grafen til en kjent funksjon, for eksempel en rett linje. Da er $P_k \approx a^{f(k)}$. Spesielt er det lurt når for eksempel P_k vokser fortere og fortere, og mye fortere enn k.

(b) Når man håper å kjenne igjen grafen til $\log_a P_k = f(\log_a k)$ som (nesten) grafen til en kjent funksjon, for eksempel en rett linje. Da er $P_k \approx a^{f(\log_a k)}$.

(c) Når man håper å kjenne igjen grafen til $P_k = f(k)$ som (nesten) grafen til en kjent funksjon. Da er $P_k \approx f(k)$.

Kommentar: her godtar vi ganske mye forskjellige ting, bare det virker fornuftig.

Oppgave 74(b) side 16:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{6^{5/2}\cdot 6^{2/3}}{6^{1/3}}\right)^3 &= \left(6^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(6^{17/6}\right)^3 = 6^{17/2}\\
&= 6^{8+1/2} = 6^8\sqrt{6} = 1679616\sqrt{6} \approx 4114202.1638.
\end{aligned}
$$

Oppgave 76(b) side 16:

$$
\begin{aligned}
\log_{1/4} x &= 2\\
x &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Oppgave 84(b) side 17:

$$\begin{aligned}\log_2(1-x) &= 3\\ 1-x &= 2^3 = 8\\ x &= 1-8 = -7\end{aligned}$$

Oppgave 84 side 71:

VET: $\ln N(t) \approx 0.03t + c$ for en eller annen (foreløpig ukjent) konstant c.

Det vil si: $N(t) = e^{0.03t+c} = C\,e^{0.03t}$ der $C = e^c$ er en (foreløpig ukjent) konstant.

VET videre: $N(0) = C\,e^0 = C = 20$

Altså er: $N(t) \approx 20\,e^{0.03t}$.

Kommentar: her får de rett selv om de velger et annet grunntall.

Oppgave 20 side 112

Beverton – Holt: $N_{t+1} = \dfrac{R\,N_t}{1+\frac{R-1}{K}\,N_t} = \dfrac{2N_t}{1+N_t/20}$.

$$\begin{aligned}
N_0 &= 5\\
N_1 &= \frac{2\cdot 5}{1+5/20} = \frac{10}{1+5/20} = \frac{10\cdot 20}{20+5} = \frac{200}{25} = 8\\
N_2 &= \frac{2\cdot 8}{1+8/20} = \frac{16\cdot 20}{20+8} = \frac{320}{28} = \frac{80}{7} \approx 11.4\\
N_3 &= \frac{2\cdot 80/7}{1+\frac{80/7}{20}} = \frac{2\cdot 80}{7+4} = \frac{160}{11} \approx 14.5\\
N_4 &= \frac{2\cdot 160/11}{1+\frac{160/11}{20}} = \frac{2\cdot 160}{11+8} = \frac{320}{19} \approx 16.8\\
N_5 &= \frac{2\cdot 320/19}{1+\frac{320/19}{20}} = \frac{2\cdot 320}{19+16} = \frac{640}{35} = \frac{128}{7} \approx 18.3.
\end{aligned}$$

La L benevne $\lim_{t\to\infty} N_t$. Da må

$$L = \frac{2L}{1+L/20}$$

Det vil si, $L = 0$ eller L er en løsning av ligningen

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{1 + L/20} = \frac{40}{20 + L} \\ 20 + L &= 40 \\ L &= 20. \end{aligned}$$

Oppgave 34 side 113:

t har benevning generasjoner

T har benevning generasjoner

Altså er $z = t/T$ dimensjonsløs.

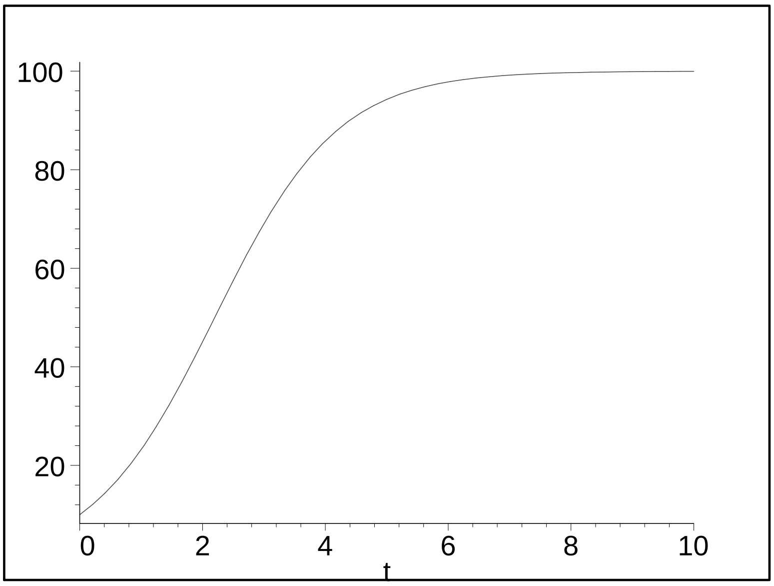
La 1 generasjon være lik n år. Da er

$$z = \frac{t}{T} \frac{\text{genarsjoner}}{\text{genarsjoner}} = \frac{t \cdot n \,\text{år}}{T \cdot n \,\text{år}} = \frac{t}{T} \frac{\text{år}}{\text{år}}$$

Oppgave 18 side 127:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x^2} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1.$$

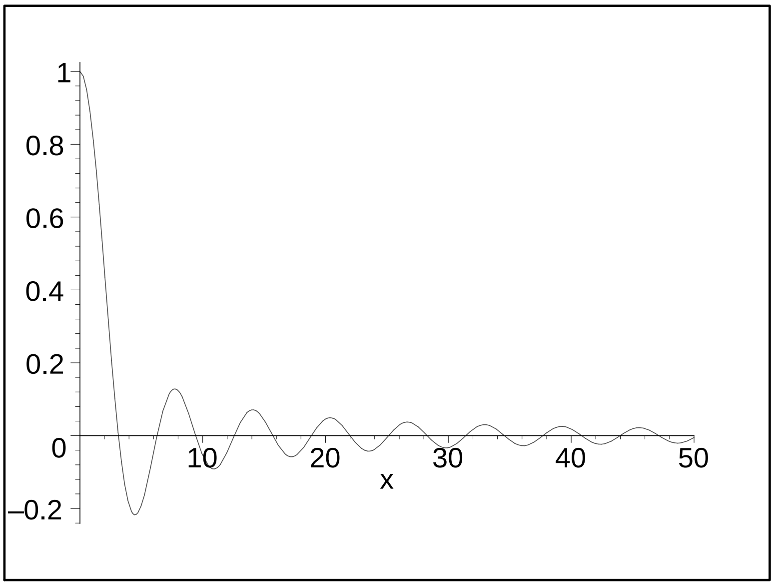
Oppgave 28 side 142:



$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{100}{1 + 9 \cdot 0} = 100.$$

Oppgave 4 side 148:

(a)



(b) Fordi telleren ikke har noen grenseverdi når $x \to \infty$, den oscillerer mellom $+1$ og -1.

(c)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{for } x > 0$$
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \text{for } x > 0 \text{ der både } -\frac{1}{x} \to 0 \text{ og } \frac{1}{x} \to 0 \text{ når } x \to \infty$$

Ved sandwich-teoremet følger derfor at $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.