LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 10, MA0001, H2007

Oppgave 20 side 356:
Leddene har formen $\dfrac{1}{2^k}$ der $k = 0$ i det første leddet og $k = n$ i det siste. Altså

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}.$$

Oppgave 25 side 356:

$$\sum_{k=0}^{6} k(k+1) = \sum_{k=0}^{6} k^2 + \sum_{k=0}^{6} k = \sum_{k=1}^{6} k^2 + \sum_{k=1}^{6} k = \frac{6(6+1)(12+1)}{6} + \frac{6(6+1)}{2} = 112.$$

Oppgave 34 side 356: Vi deler intervallet $[-1,\, 1]$ i fem like deler. Bredden av hvert delintervall er da $\Delta x = 2/5$, og delepunktene blir

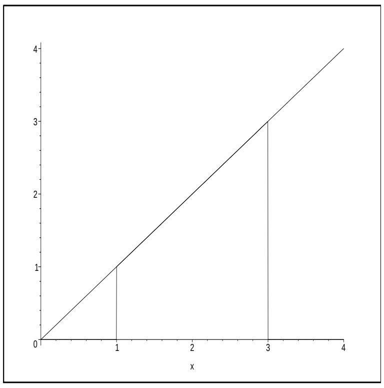
$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \Delta x = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = -1 + 2\Delta x = -\frac{1}{5}, \quad x_3 = -1 + 3\Delta x = \frac{1}{5},$$
$$x_4 = -1 + 4\Delta x = \frac{3}{5}, \quad x_5 = 1.$$

Vi tilnærmer integralet med Riemannsummen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} f(x_k)\Delta x &= \Delta x \sum_{k=1}^{5} (1 - x_k^2) \\
&= \tfrac{2}{5}\left((1 - (-\tfrac{3}{5})^2) + (1 - (-\tfrac{1}{5})^2) + (1 - (\tfrac{1}{5})^2) + (1 - (\tfrac{3}{5})^2) + (1 - 1^2)\right) \\
&= \tfrac{2}{5}\left(1 - \tfrac{9}{25} + 1 - \tfrac{1}{25} + 1 - \tfrac{1}{25} + 1 - \tfrac{9}{25}\right) = \tfrac{2}{5}\left(4 - \tfrac{20}{25}\right) = \tfrac{32}{25}.
\end{aligned}$$

Oppgave 39 side 357: Grafen fil funksjonen $f(x) = x$ er en rett linje som vist på figuren. Integralet er arealet av området under denne linjen, mellom de to vertikale linjene $x = a > 0$ og $x = b > a$. Det vil si, det er arealet av trapeset med hjørner i $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, b) og (a, a). Derfor:

$$\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}(b-a) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$



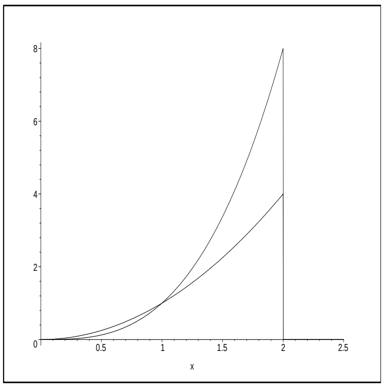
Oppgave 55 side 372:

$$\int (x-2)(3-x)\,dx = \int (3x-x^2-6+2x)\,dx = \int (-x^2+5x-6)\,dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-6x+C.$$

Oppgave 101 side 373:

$$\int_1^8 x^{-2/3}\,dx = \left[\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1}\right]_{x=1}^{x=8} = \left[\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_{x=1}^{x=8}$$
$$= 3(8^{1/3}-1^{1/3}) = 3(2-1) = 3.$$

Oppgave 11 side 393:



Kurvene avgrenser to separate områder. Det første området er avgrenset av øvre kurve $y = x^2$ og nedre kurve $y = x^3$ for $0 \leq x \leq 1$. Det har derfor areal

$$\int_{x=0}^{x=1} (x^2 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

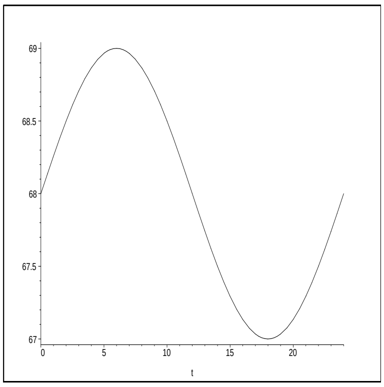
Det andre området er avgrenset av øvre kurve $y = x^3$ og nedre kurve $y = x^2$ for $1 \leq x \leq 2$. Det har derfor areal

$$\int_{x=1}^{x=2} (x^3 - x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{17}{12}.$$

Tilsammen blir arealet $A = \frac{1}{12} + \frac{17}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.

Oppgave 27 side 393:

(a).



(b). Middeltempreraturen (gjennomsnittstemperaturen) er gitt ved

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} T(t)dt = \frac{1}{24}\int_0^{24}(68 + \sin(\pi t/12))dt = \frac{1}{24}\left[68t - \frac{\cos \pi t/12}{\pi/12}\right]_{t=0}^{24} = 68.$$

Arealet mellom kurven og linjen $y = 68$ er like stort over linjen som under linjen på grunn av symmetrien i sinus-funksjonen. Derfor må middelverdien bli 68.

Oppgave 1 side 395: Oppgavn kan besvares på flere måter. Vi kan for eksempel la verdiene for x i tabellen være delepunktene våre for intervallet fra 0 til $B = 16$. Da blir ikke alle intervallene like lange, men vi får det til likevel:

$$Q = \int_0^B \overline{v}(b)h(b)\,db \approx 0.28 \cdot 0.172 \cdot 1 + 0.76 \cdot 0.213 \cdot 2 + 1.34 \cdot 0.230 \cdot 2 + 1.57 \cdot 0.256 \cdot 2$$
$$+ 1.42 \cdot 0.241 \cdot 2 + 1.21 \cdot 0.206 \cdot 2 + 0.83 \cdot 0.187 \cdot 2 + 0.42 \cdot 0.116 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 3.38.$$

Vi kunne også dele intervallet i 8 like deler, med delepunkter i $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$. Da har vi en måling for $\overline{v}$ i hvert intervall, slik at vi kan bruke den som høyde av rektanglet. Det gir

$$Q = \int_0^B \overline{v}(b)h(b)\,db \approx 2\cdot(0.28\cdot 0.172 + 0.76\cdot 0.213 + 1.34\cdot 0.230 + 1.57\cdot 0.256 + 1.42\cdot 0.241 + 1.21\cdot 0.206 + 0.83\cdot 0.187 + 0.42\cdot 0.116) = 3.43.$$

Oppgave 15 side 407:

$$\mathcal{I} = \int \frac{3}{x+4}\,dx.$$

Substitusjonen $u = x+4$ gir $du = dx$. Innsatt i integralet gir det

$$\mathcal{I} = \int \frac{3}{x+4}\,dx = 3\int \frac{1}{u}\,du = 3\ln|u| + C = 3\ln|x+4| + C.$$

Oppgave 17 side 407:

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x+3}\,dx.$$

Substitusjonen $u = x+3$ gir $du = dx$. Innsatt i integralet gir det

$$\mathcal{I} = \int \sqrt{x+3}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2} + C.$$

Oppgave 43 side 407: Substitusjonen $u = x^2+1$ gir $du = 2x\,dx$, slik at $x\,dx = du/2$. Når $x = 0$, er $u = 1$, og når $x = 3$ er $u = 10$. Derfor er

$$\int_0^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_1^{10} \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_{u=1}^{10} u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=1}^{10} = \frac{1}{3}\left(10^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 1).$$

Oppgave 55 side 407: Substitusjonen $u = \ln x$ gir $du = \frac{1}{x}\,dx$. Videre er $u = 1$ når $x = e$ og $u = 2$ når $x = e^2$. Derfor er

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_e^{e^2} \frac{1}{(\ln x)^2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{u^2}\,du = \Big[-u^{-1}\Big]_{u=1}^2 = -\tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{1}{2}.$$

Oppgave 1 side 414:

$$\mathcal{I} = \int x \,\cos x \, dx.$$

Vi vil bruke delvis integrasjon. Vi velger å sette $u = x$ og $v' = \cos x$. Da er $u' = 1$ og $v = \sin x$. Derved blir

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int x \,\cos x\, dx = \int u \cdot v' \, dx = uv - \int u' \cdot v \, dx \\ &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \,\sin x - (-\cos x) + C = x \,\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Oppgave 19 side 414:

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Vi vil bruke delvis integrasjon. Vi velger å sette $u = \ln x$ og $v' = 1$. Da er $u' = \frac{1}{x}$ og $v = x$. Derved blir

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 u \cdot v' \, dx = \Big[uv\Big]_{x=1}^2 - \int_1^e u' \cdot v \, dx = \Big[x \cdot \ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= 2\ln 2 - 1 \ln 1 - \int_1^2 1 \, dx = 2\ln 2 - \Big[x\Big]_{x=1}^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

Oppgave 1 side 442:

$$\int_0^\infty 3e^{-3x} dx = \lim_{T\to\infty} \int_0^T 3e^{-3x} dx = \lim_{T\to\infty} \Big[-e^{-3x}\Big]_{x=0}^T = \lim_{T\to\infty} (-e^{-3T} + e^0) = 0 + 1 = 1.$$

Oppgave 9 side 442:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \lim_{S\to-\infty} \int_S^0 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.\end{aligned}$$

Substitusjonen $u = 1 + x^2$ gir $du = 2x\, dx$. Derved er

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2} \int u^{-2} \, du = \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{2u} + C = \frac{-1}{2(1+x^2)} + C$$

slik at

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \lim_{S\to-\infty}\left[\frac{-1}{2(1+x^2)}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{2(1+x^2)}\right]_0^T \\ &= \lim_{S\to-\infty}\left[\frac{-1}{2(1+0^2)} - \frac{-1}{2(1+S^2)}\right] + \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{2(1+T^2)} - \frac{-1}{2(1+0^2)}\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$