LØSNINGSFORSLAG FOR OBLIGATORISK ØVING 2, MA0001, H2007

Oppgave 28 side 177: Vi sammenligner med definisjonen av den deriverte $f'(a)$:

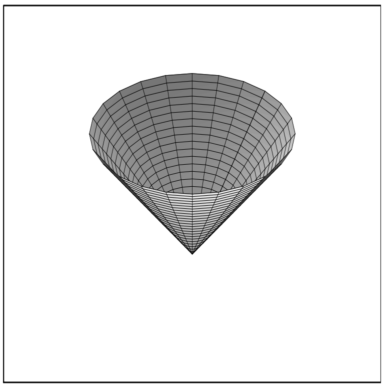
$$\lim_{h\to 0}\frac{4(a+h)^3-4a^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

og ser at det holder for $f(x)=4x^3$.

Oppgave 42 side 209:

$$\begin{aligned} y &= (1+(x-1)^2)^2 \\ \frac{dy}{dx} &= 2(1+(x-1)^2)\cdot\frac{d}{dx}(1+(x-1)^2) \\ &= 2(1+(x-1)^2)\cdot 2(x-1)\cdot 1 = \underline{4(x-1)(1+(x-1)^2)} \end{aligned}$$

Oppgave 70 side 210:



VET: $\dfrac{dV}{dt}=5\,\text{ft}^3/\text{min}.$

VET: $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h$ der $r=h/2$.

Altså: $V=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{h}{2}\right)^2h=\dfrac{\pi}{12}h^3.$

Implisitt derivasjon med hensyn på t:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\cdot 3h^2\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

I det øyeblikket der $h = 2$ ft gjelder derfor:

$$5 = \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \frac{dh}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}.$$

Det vil si: $\underline{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{5}{\pi} \text{ ft/min.}}$

Oppgave 54 side 215:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1+\cos 3x}{2x^3 - x} \\
f'(x) &= \frac{(1+\cos 3x)' \cdot (2x^3 - x) - (1+\cos 3x) \cdot (2x^3 - x)'}{(2x^3 - x)^2} \\
&= \frac{((-\sin 3x) \cdot 3)(2x^3 - x) - (1+\cos 3x) \cdot (2 \cdot 3x^2 - 1)}{(2x^3 - x)^2} \\
&= \frac{-(3\sin 3x)(2x^3 - x) - (1+\cos 3x)(6x^2 - 1)}{(2x^3 - x)^2}
\end{aligned}$$

Oppgave 71 side 216:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan^3(3x^3 - 3) \\
f'(x) &= [3\tan^2(3x^3 - 3)] \cdot (\tan(3x^3 - 3))' \\
&= [3\tan^2(3x^3 - 3)] \cdot \frac{1}{\cos^2(3x^3 - 3)} \cdot (3x^3 - 3)' \\
&= \frac{3\tan^2(3x^3 - 3)}{\cos^2(3x^3 - 3)} \cdot 3 \cdot 3x^2 = \frac{27x^2 \tan^2(3x^3 - 3)}{\cos^2(3x^3 - 3)}
\end{aligned}$$

Oppgave 12 side 233: $y = f(x) = x + e^x$ for $x > 0$.
Når $x = 1$, er $y = f(1) = 1 + e$. $f(x)$ er en-entydig fordi $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Altså er $f(x)$ inverterbar og $x = 1 \Leftrightarrow y = 1 + e$.
Vi bytter navn på x og y fordi vi skal studere den inverse funksjonen:

$$x = y + e^y \quad \text{for } y > 0, \qquad y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + e.$$

For å finne $\frac{dy}{dx}$, deriverer vi implisitt med hensyn på x:

$$1 = \frac{dy}{dx} + e^y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + e^y)\frac{dy}{dx}.$$

Derved er

$$\frac{dy}{dx} = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+e^y}.$$

Spesielt, for $x = 1 + e$ er $y = 1$, så $(f^{-1})'(1+e) = \frac{1}{1+e^1} = \underline{\frac{1}{1+e}}.$

Oppgave 33 side 242:

VET: $\frac{dB}{dt} = 0.01 \cdot B(t) = 0.01 \cdot 5 = 0.05$ ved tid $t = 1.0$.
Lineær approksimasjon:

$$B(1.1) \approx B(1.0) + B'(1.0) \cdot (1.1 - 1.0) = 5 + 0.05 \cdot 0.1 = 5 + 0.005 = 5.005\,\mathrm{g}$$

Oppgave 45 side 242: $V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.
La feilen i måling av radien være Δr. Det vil si: korrekt radius er r_0 som er ukjent, og målt radius er $r = r_0 + \Delta r$ der Δr er ukjent, men $\frac{|\Delta r|}{r} < 3/100$.

La

$$V_0 = f(r_0) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \quad \text{og} \quad V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (r_0 + \Delta r)^3.$$

Det vil si, V_0 er det korrekte volumet, mens V er volumet vi beregner når vi benytter den målte verdien for radien. Vi skal finne et uttrykk for feilen i det beregnede volumet. Vi kan ikke finne ut akkurat hvor stor feilen er, men vi kan finne en skranke for feilen $|V - V_0|$. Siden skranken for feilen i radien var gitt i prosent, det vil si

$$\frac{|r - r_0|}{r} = \frac{|\Delta r|}{r} \leq 3\,\text{prosent} = \frac{3}{100},$$

er det naturlig å angi skranken for feilen $|V - V_0|$ i prosent. Det vil si, vi søker et tall k slik at

$$\frac{|V - V_0|}{|V|} = \frac{|f(r_0) - f(r)|}{f(r)} \leq k\,\text{prosent} = \frac{k}{100}.$$

Ved lineær approksimasjon gjelder

$$f(r_0) \approx f(r) + f'(r)(r_0 - r).$$

Derfor er

$$\frac{|V - V_0|}{|V|} \approx \frac{|f'(r)(r_0 - r)|}{|f(r)|}$$

der $f'(r) = 4\pi\, r^2$. Det vil si,

$$\begin{aligned}\frac{|V - V_0|}{|V|} &\approx \frac{|f'(r)(r_0 - r)|}{|f(r)|} = \frac{4\pi\, r^2 |r_0 - r|}{\frac{4}{3}\pi\, r^3} \\ &= \frac{3|r_0 - r|}{r} = 3\,\frac{|r_0 - r|}{r} \leq 3 \cdot \frac{3}{100} = \frac{9}{100} = 9\,\text{prosent.}\end{aligned}$$

Den relative feilen i volumet er derfor 9 prosent.

Oppgave 30 side 271:
N tetthet for budworms.
Hver fugl spiser (i.e., per capita predation rate) $f(N) = \dfrac{aN}{k^2 + N^2}$ budworms/tidsenhet der a og k er positive konstanter.

$$\begin{aligned}f'(N) &= \frac{(aN)' \cdot (k^2 + N^2) - aN \cdot (k^2 + N^2)'}{(k^2 + N^2)^2} \\ &= \frac{a(k^2 + N^2) - aN \cdot 2N}{(k^2 + N^2)^2} = \frac{a(k^2 + N^2 - 2N^2)}{(k^2 + N^2)^2} = \frac{a(k^2 - N^2)}{(k^2 + N^2)^2}.\end{aligned}$$

Her er nevneren positiv og a positiv hele tiden. Fortegnet for $f'(N)$ er derfor det samme som fortegnet for $(k^2 - N^2)$. Det vil si:

$$\begin{aligned}f'(N) > 0 \;\; &\text{og hastigheten } \; f'(N) \; \text{øker når } \; k^2 - N^2 > 0 \\ &\text{altså for } \; 0 < N < k. \\ f'(N) < 0 \;\; &\text{og hastigheten } \; f'(N) \; \text{avtar når } \; k^2 - N^2 < 0 \\ &\text{altså for } \; N > k.\end{aligned}$$

Oppgave 44 side 288: Per capita predation rate er $f(N) = \dfrac{aN}{k^2 + N^2}$ budworms/tidsenhet.
VET (fra forrige oppgave):

$$f'(N) \;\; \text{er} \;\; \begin{cases} > 0 & \text{for } \; N < k \\ < 0 & \text{for } \; N > k. \end{cases}$$

Derfor har $f(N)$ et maksimum for $N = k$. (Lag figur!)
Konklusjon: Når tettheten av budworms er k, spiser hver enkelt fugl flest budworms.

Oppgave 5 side 296:

La rektanglet ha sider a og b, der b er lengden av grensen mot elven.
Lengden av gjerdet er da $L = a + b + a = 2a + b = 320$ ft, slik at $b = 320 - 2a$.
Arealet av rektanglet er $A = a \cdot b = a(320 - 2a) = 320a - 2a^2 = f(a)$.

Vi vil bestemme $a \geq 0$ slik at $A = f(a)$ er maksimal.
Vi vet at $b = 320 - 2a \geq 0$. Det vil si, $320 \geq 2a$, alstå $a \leq 160$.
Vi skal alså finne a som maksimerer $f(a)$ på det lukkede intervallet $[0, 160]$.

Endepunkter: $f(0) = 320 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$ og $f(160) = 320 \cdot 160 - 2 \cdot 160^2 = 0$.

Kritiske punkter: $f'(a) = 320 - 2 \cdot 2a = 0$ for $a = \dfrac{320}{4} = 80$.

$$f(80) = 320 \cdot 80 - 2 \cdot 80^2 = 12800 > 0.$$

Altså oppnås maksimalt areal når $a = 80$ ft og $b = 320 - 2a = 320 - 160 = 160$ ft.

Oppgave 18 side 297: Denne oppgaven ble regnet på forelesningen den 07.11.