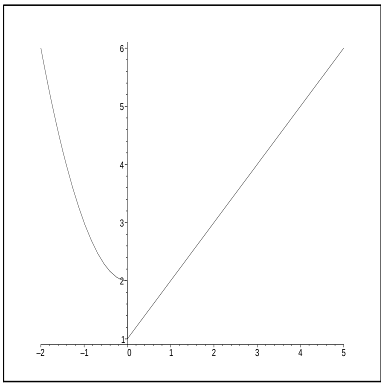
Large LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 5, MA0001, H2007

Oppgave 10 side 137: Grenseverdien eksisterer ikke når $x \to 1$ eller $x \to -1$. Derfor er $f(x)$ diskontinuerlig i disse punktene.

Oppgave 27 side 137:

(a)



$f(x)$ er diskontinuerlig for $x = 0$.

(b) Vi har at

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+c) = c,$$

og $f(0) = 2$. Skal f være kontinuerlig for $x = 0$, må $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Derfor må $c = 2$. f er kontinuerlig overalt ellers.

Oppgave 45 side 138:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+9})^2-3^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}.$$

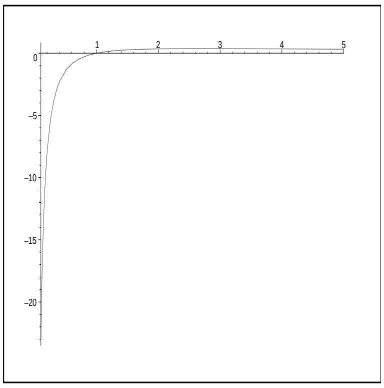
Oppgave 10 side 142:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-x^3}{2+x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1/x^3-1}{2/x^3+1/x^2}$$

der nevneren går mot null og telleren mot -1. Altså eksisterer ikke grenseverdien. Vil man beskrive situasjonen mer presist, ser man at telleren i den første brøken holder seg positiv når $x < 0$, mens nevneren er negativ når $x < -2$. Altså er $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^3}{2+x} = -\infty$.

Oppgave 3 side 148: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(a)



(b) Ulikheten gjelder for eksempel for $x \geq 5$.

(c) Siden $\lim_{x\to\infty}(1/x) = 0$ og $\lim_{x\to\infty}(1/\sqrt{x}) = 0$, viser sandwich-teoremet at $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Oppgave 7 side 148: Vi setter $u = 5x$. Da er $x = u/5$. Siden $u \to 0$ hvis og bare hvis $x \to 0$, er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u/5} = \lim_{u\to 0} 5\frac{\sin u}{u} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Oppgave 9 side 153:

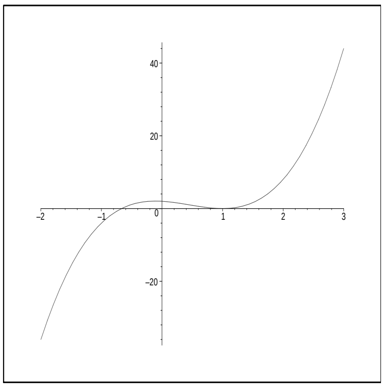
(a) La $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$. Da er $f(0) = 2$, $f(-1) = -4$, så ved skjæringssetningen har f et nullpunkt i intervallet $(-1, 0)$.

Midtpunktet av dette intervallet er $-\frac{1}{2}$. Vi lager tabell:

endepunkt	intervall	midtp.	$\frac{1}{2}$ bredde
$f(-1) < 0$	$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	0.5
$f(-\frac{1}{2}) > 0$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$-\frac{3}{4}$	0.25
$f(-\frac{3}{4}) < 0$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{5}{8}$	0.125
$f(-\frac{5}{8}) > 0$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8})$	$-\frac{11}{16}$	0.0625
$f(-\frac{11}{16}) < 0$	$(-\frac{11}{16}, -\frac{5}{8})$	$-\frac{21}{32}$	0.03125
$f(-\frac{21}{32}) > 0$	$(-\frac{11}{16}, -\frac{21}{32})$	$-\frac{43}{64}$	0.0156...
$f(-\frac{43}{64}) < 0$	$(-\frac{43}{64}, -\frac{21}{32})$	$-\frac{85}{128}$	0.0078...
$f(-\frac{85}{128}) > 0$	$(-\frac{43}{64}, -\frac{85}{128})$	$-\frac{171}{256}$	0.0039...

der $-\frac{171}{256} \approx -0.6679 \approx -0.67$. Altså er $f(x) = 0$ for $x \approx -0.67$ med to sikre desimaler.

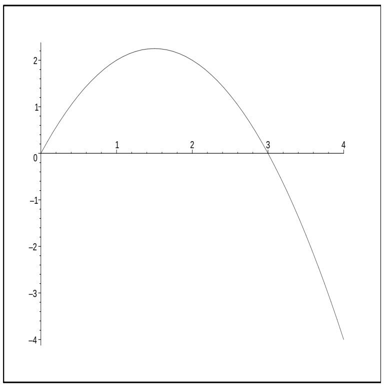
(b)



(c) Vi har lokalisert det venstre nullpunktet. Det høyre nullpunktet kan ikke finnes på denne måten fordi $f(x) > 0$ på begge sider av nullpunktet. (Men en enkel sjekk viser at $f(1) = 0$.)

Oppgave 34 side 178:

(a)



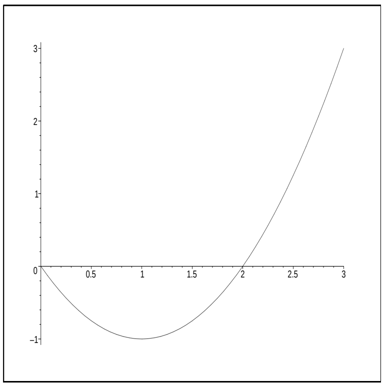
(b)
(i) Partikkelen er i origo.
(ii) Partikkelen er i origo også ved tidspunkt $t = 3$.
(iii) Partikkelen tilbakelegger en veilengde på ca 2.2 før den snur.
(iv) Partikkelen går avsted mot $-\infty$ når $t \to \infty$.
(v) Hastigheten er positiv når s øker og negative når s avtar. Det vil si, positiv for $0 < t < 1.25$ sånn cirka, og negativ for $t > 1.25$ sånn cirka.

(c) Partikkelens hastighet ved tidspunkt t er $v(t) = s'(t) = 3 - 2t$.

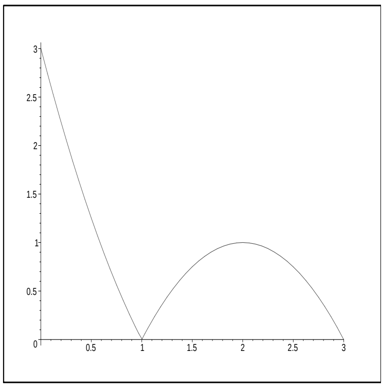
(d) Hastigheten er lik 1 når $3 - 2t = 1$, det vil si når $-2t = -2$, det vil si når $t = 1$.

Oppgave 60 side 179: På bildene er $a = 2$.

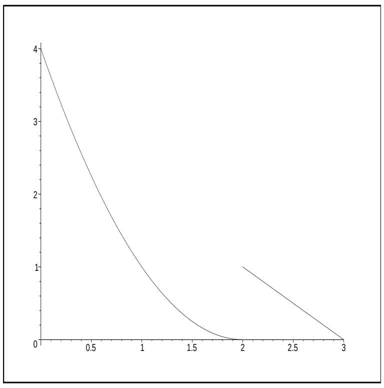
(a)



(b)



(c)



Oppgave 57 side 185: Ligning for tangenten i punktet $(2,\, f(2)) = \left(2,\, \frac{4a}{a^2+2}\right)$:

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$

der

$$f'(x) = \frac{2ax}{a^2+2} \quad \text{og derved} \quad f'(2) = \frac{4a}{a^2+2}.$$

Tangentligningen er derfor $y = \dfrac{4a}{a^2+2} + \dfrac{4a}{a^2+2}(x-2) = \dfrac{4a}{a^2+2}(x-1)$.

Oppgave 61 side 185: Stigningstallet for tangenten er $f'(2)$. Vi har

$$f'(x) = \frac{2ax}{a+1} \quad \text{så} \quad f'(2) = \frac{4a}{a+1}.$$

Stigningstallet m for normalen er slik at $m \cdot f'(2) = -1$. Det vil si

$$m = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{\dfrac{4a}{a+1}} = -\frac{a+1}{4a}.$$

Normalen skal gå gjennom punktet $(2, f(2)) = \left(2, \dfrac{4a}{a+1}\right)$. Ligningen for normalen er derfor

$$\left(y - \frac{4a}{a+1}\right) = -\frac{a+1}{4a}(x-2).$$

Oppgave 31 side 193:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2a(x^2-a)^2 + a \\ f'(x) &= 2a \cdot 2(x^2-a) \cdot (x^2-a)' + 0 = 4a(x^2-a) \cdot 2x = 8ax(x^2-a). \end{aligned}$$

Oppgave 51 side 193:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-2x^2)' \cdot (1-x) - (1-2x^2) \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(-4x)(1-x) - (1-2x^2)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-4x + 4x^2 + 1 - 2x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$