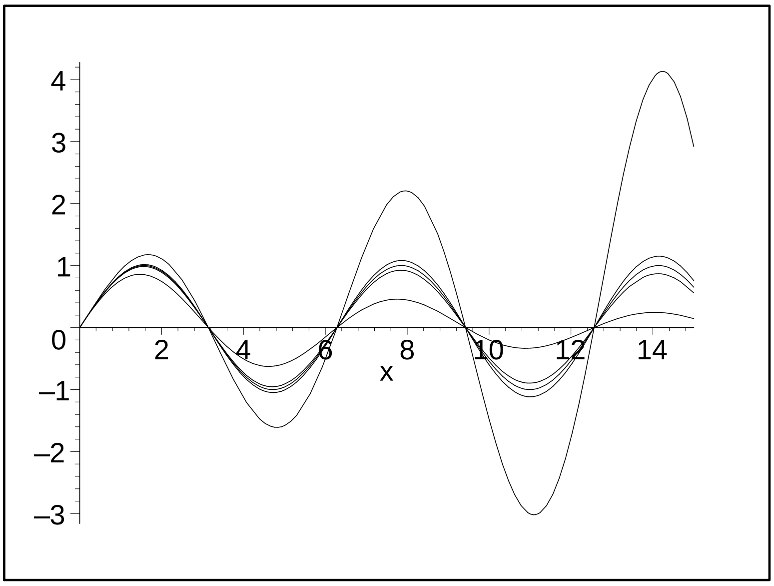
LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 6, MA0001, H2007

Oppgave 30 side 143:

(a)



(b) Sinusleddet.

(c) Dersom $a > 0$ vokser leddet e^{ax} med x, fortere jo større a er. Derved blir utsvingene større og større med x.
Dersom $a < 0$ avtar leddet e^{ax} med x, fortere jo større $|a|$ er. Derved blir utsvingene mindre og mindre med x.
Dersom $a = 0$ er $e^{ax} = 1$ for alle x, og kurven er en ren sinus.

Oppgave 39 side 179: $\dfrac{dx}{dt} = 3(7-x)(4-x)$.
$dx/dt = 0$ for $x = 7$ og for $x = 4$. Det er altså ingen øyeblikkelig endring i konsentrasjonen av AB akkurat når $x = 7$ eller $x = 4$. Konsentrasjonen holder seg derfor ganske stabil rundt konsentrasjon $x = 7$ og $x = 4$.

Oppgave 71 side 185: Linjen $y = 2$ er parallell med x-aksen. Den har derfor stigningstall 0. Vi leter derfor etter punkter på kurven $y = 4 - x^2$ der tangenten har stigningstall 0. Det vil si, vi leter etter punkter der den deriverte $y'(x) = 0$. Derivasjon viser at $y'(x) = -2x$. Altså er $y'(x) = 0$ bare for $x = 0$. Der er $y = 4 - 0^2 = 4$. Altså er tangenten parallell med linjen $y = 2$ i punktet $(0, 4)$. Det finnes ikke flere slike punkter.

Oppgave 75 side 185: Linjen $3x - y = 2$ kan skrives $y = 3x - 2$, og har derfor stigningstall 3. Vi leter derfor etter punkter på kurven $y = x^3 + 2x + 2$ der tangenten har stigningstall 3. Det vil si, vi leter etter punkter der den deriverte $y'(x) = 3$. Derivasjon viser at $y'(x) = 3x^2 + 2$. Altså er $y'(x) = 3$ når $3x^2 + 2 = 3$, det vil si $3x^2 = 1$, det vil si for $x = 1/\sqrt{3}$ og for $x = -1/\sqrt{3}$. Nå er

$$y(1/\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 2\,\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \left(\frac{1}{3} + 2\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = \frac{4}{3\sqrt{3}} + 2$$
$$y(-1/\sqrt{3}) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 2\,\frac{-1}{\sqrt{3}} + 2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = -\left(\frac{1}{3} + 2\right)\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 = -\frac{7}{3\sqrt{3}} + 2$$

Altså er tangenten parallell med linjen $y = 3x - 2$ i punktene $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}} + 2\right)$ og $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{3\sqrt{3}} + 2\right)$. Det finnes ikke flere slike punkter.

Oppgave 49 side 209: Vi søker dy/dx. Vi deriverer derfor ligningen implisitt med hensyn på x:

$$\begin{aligned} x^{3/4} + y^{3/4} &= 1 \\ \frac{3}{4}x^{3/4-1} + \frac{3}{4}y^{3/4-1} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{3}{4}x^{-1/4} + \frac{3}{4}y^{-1/4} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x^{-1/4} + y^{-1/4} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ y^{1/4} + x^{1/4} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x^{1/4} \cdot \frac{dy}{dx} &= -y^{1/4} \\ \frac{dy}{dx} &= -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4} \end{aligned}$$

Oppgave 63 side 210: Vi kan enten løse ligningen med hensyn på y og så derivere med hensyn på t, eller vi kan derivere ligningen implisitt med hensyn på t. Vi velger å gjøre det siste:

$$\begin{aligned} x^2 y &= 1 \\ \frac{d(x^2)}{dt} \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dt} &= 0 \\ 2x\,\frac{dx}{dt} \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

For $x=2$ er $y=\frac{1}{4}$ og $dx/dt=3$. Innsatt i ligningen gir det

$$\begin{aligned} 2\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{4}+2^2\cdot \frac{dy}{dt} &= 0\\ 4\cdot \frac{dy}{dt} &= -\frac{12}{4}=-3\\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oppgave 69 side 210:
VET: Vannets volum $V(t)$ avtar med 250 liter/minutt. Det vil si $V'(t)=-250$ liter/minutt. 1 liter = 1 dm^3 = $\frac{1}{1000}m^3$. Vi velger holde oss til meter. Altså: $V'(t)=-250$ liter/minutt $=-\frac{250}{1000}m^3$/minutt $=-0.250m^3$/minutt.
VIL FINNE: hvor fort avtar vannhøyden h, det vil si: $h'(t)$.
VET: $V=\pi r^2 h=\pi\cdot 5^2\cdot h=25\pi h$.
Vi deriverer denne ligningen med hensyn på t: $V'(t)=25\pi\, h'(t)$
Altså er

$$h'(t)=\frac{1}{25\pi}V'(t)=\frac{1}{25\pi}(-0.250)\text{dm/minutt}=-\frac{1}{100\pi}\text{meter/minutt.}$$

Konklusjon: vannhøyden avtar med $\frac{1}{100\pi}$ meter/minutt ≈ 0.00318 meter/minutt.

Oppgave 83 side 210:

$$\begin{aligned} &y(x)=x^5,\quad y'(x)=5x^4,\quad y''(x)=4\cdot 4x^3=20x^3,\quad y'''(x)=5\cdot 4\cdot 3x2^{=}60x^2,\\ &y^{(4)}(x)=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x=120x, y^{(5)}(x)=5!=120,\quad y^{(6)}(x)=0,\quad y^{(7)}=y^{(8)}=y^{(9)}=y^{(10)}=0. \end{aligned}$$

Oppgave 23 side 115: $f(x)=4\cos^2 x$.

$$f'(x)=4(2\cos x)\cdot(\cos x)'=8(\cos x)(-\sin x)=-8\sin x\cos x=-4\sin 2x.$$

Oppgave 43 side 221: $f(x)=2^{\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=(2^{\sqrt{x}}\ln 2)\cdot(\sqrt{x})'=(2^{\sqrt{x}}\ln 2)\cdot(x^{1/2})'=(2^{\sqrt{x}}\ln 2)\cdot(\frac{1}{2}x^{-1/2}).$$

Oppgave 59 side 234: $f(u)=\log_3(3+u^4)$.

$$f'(u)=\frac{1}{(3+u^4)\ln 3}\cdot(3+u^4)'=\frac{1}{(3+u^4)\ln 3}\cdot 4u^3=\frac{4u^3}{(3+u^4)\ln 3}$$

Oppgave A:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^7 &= 1^7 + \binom{7}{1}1^6x^2 + \binom{7}{2}1^5x^2 + \binom{7}{3}1^4x^3 + \binom{7}{4}1^3x^4 + \binom{7}{5}1^2x^5 + \binom{7}{6}1^1x^6 + \binom{7}{7}1^0x^7 \\
&= 1 + \frac{7}{1}x^6 + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}x^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 \\
&+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 \\
&= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.
\end{aligned}
$$

Pascals trekant:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$