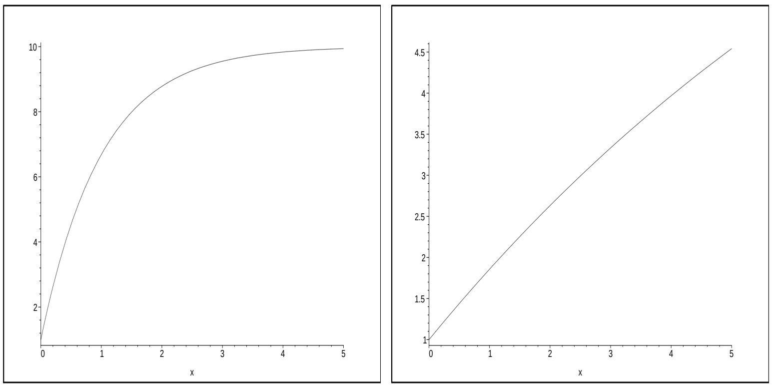
LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 7, MA0001, H2007

Oppgave 65 side 222:

$$L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kx}$$

(a) Grafen for $L(x) = 10 - 9\,e^{-1.0x}$ for $k = 1.0$ og $k = 0.1$:



(b) $L_\infty = \lim_{x\to\infty} L(x)$ og $L_0 = L(0)$. Det vil si, L_0 er fødselsvekten til fisken og L_∞ er en øvre grense for hvor tung (egentlig masse) fisken kan bli.

(c) Fisken når ifølge modellen masse 5 tidligere for $k = 1.0$ enn for $k = 0.1$.

(d)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,L(x) &= 0 - (L_\infty - L_0)e^{-kx}(-k) = k(L_\infty - L_0)e^{-kx} \\ &= -k[L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kx} - L_\infty] = -k[L(x) - L_\infty] = k[L_\infty - L(x)].\end{aligned}$$

Vekstraten avtar etterhvert som alderen øker.

(e) Jo større konstanten k er, jo raskere øker fiskens størrelse i begynnelsen av livet.

Oppgave 71 side 222:

$$dW/dt = -3W(t), \qquad W(0) = 6$$

(a)

$$\begin{aligned}&\text{VET:}\quad W(t)\ \text{ er på formen }\ W(0)\cdot e^{kt} = 6\,e^{kt} \\ &\text{VET:}\quad W'(t) = 6ke^{kt} = -3W(t) = -3\cdot 6e^{kt}\end{aligned}$$

for alle t. Altså må $6k = -3\cdot 6$, det vil si, $k = -3$.

Vi har derfor $W(t) = 6e^{-3t}$. Ved tid $t = 4$ er mengde radioaktivt materiale derfor

$$W(4) = 6\,e^{-3\cdot 4} = 6\,e^{-12} \approx 0.00003686527412 \approx 0.000037 = 3.7 \cdot 10^{-5}.$$

(b) La T være halveringstiden for materialet. Siden $W(0) = 6$, må $W(T) = 3$. Det vil si

$$\begin{aligned}
6\,e^{-3T} &= 3\\
e^{-3T} &= \frac{1}{2}\\
-3T &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\\
T &= \frac{1}{3}\ln 2 \approx 0.231049 \approx 0.23.
\end{aligned}$$

Oppgave 13 side 234: $y = f(x) = x - \sin x$.
Vi bytter navn på de variable: $\quad x = y - \sin y \quad (*)$
Ligningen $(*)$ definerer $y = f^{-1}(x)$ implisitt. Vi søker $(f^{-1})'(x)$. Vi deriverer derfor $(*)$ implisitt med hensyn på x:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx}\\
1 &= (1-\cos y)\frac{dy}{dx}\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1-\cos y}
\end{aligned}$$

Vi setter $x = \pi$. Da er også $y = \pi$, og vi får

$$(f^{-1})'(\pi) = \frac{1}{1-\cos\pi} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 69 side 234:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{1/x}\\
\ln f(x) &= \frac{1}{x}\ln x\\
\frac{d}{dx}[\ln f(x)] &= \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}\\
f'(x) &= f(x)\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}
\end{aligned}$$

Oppgave 75 side 234: $\quad y = \dfrac{e^{2x}(9x-2)^3}{\sqrt[4]{(x^2+1)(3x^3-7)}}$. Dette uttrykket kan godt deriveres ved hjelp av de vanlige derivasjonsreglene, men det blir ganske stort og komplisert og vanskelig, og det kan lett bli små regnefeil underveis. En enklere måte er å bruke logaritmisk derivasjon:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln(e^{2x}) + \ln((9x-2)^3) - \ln\{[(x^2+1)(3x^3-7)]^{1/4}\} \\
&= 2x + 3\ln(9x-2) - \tfrac{1}{4}\ln[(x^2+1)(3x^3-7)] \\
&= 2x + 3\ln(9x-2) - \tfrac{1}{4}[\ln(x^2+1) + \ln(3x^3-7)], \\
\frac{d}{dx}\ln y &= 2 + 3\cdot\frac{1}{9x-2}\cdot 9 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{3x^3-7}\cdot 3\cdot 3x^2\right] \\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right] \\
\frac{dy}{dx} &= y\cdot\left\{2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right]\right\} \\
&= \frac{e^{2x}(9x-2)^3}{\sqrt[4]{(x^2+1)(3x^3-7)}}\left\{2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{1}{4}\left[\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right]\right\}
\end{aligned}$$

Oppgave 7 side 241:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, && f(\tfrac{\pi}{2}) = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \\
&f'(x) = \cos x && f'(\tfrac{\pi}{2}) = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \\
&f(\tfrac{\pi}{2} + 0.02) \approx f(\tfrac{\pi}{2}) + f'(\tfrac{\pi}{2})\cdot 0.02 = 1 + 0\cdot 0.02 = 1.
\end{aligned}$$

Med kalkulator: $f(\frac{\pi}{2} + 0.02) \approx 0.9998 \approx 1.00$.

Oppgave 25 side 241:

$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{x-1}, && f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1, \\
&f'(x) = e^{x-1} && f'(1) = 1, \\
&f(x) = e^{x-1} \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 1(x-1) = 1 + x - 1 = x.
\end{aligned}$$

Oppgave 27 side 242:

$$\begin{aligned}
&f(x) = (1+x)^{-n}, && f(0) = 1^{-n} = 1, \\
&f'(x) = -n(1+x)^{-n-1} && f'(0) = -n\cdot 1^{-n-1} = -n\cdot 1 = -n, \\
&f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + (-n)x = 1 - nx.
\end{aligned}$$

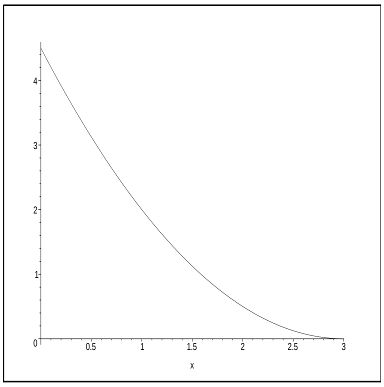
Oppgave 31 side 242: Differensialligningen $\dfrac{1}{N}\dfrac{dN}{dt} = 0.03$ sammen med opplysningen $N(4) = 100$ definerer $N(t)$, selv om vi ikke klarer å løse ligningen med det vi har lært til nå. Fra ligningen finner vi at

$$N'(4) = 0.03 \cdot N(4) = 0.03 \cdot 100 = 3$$

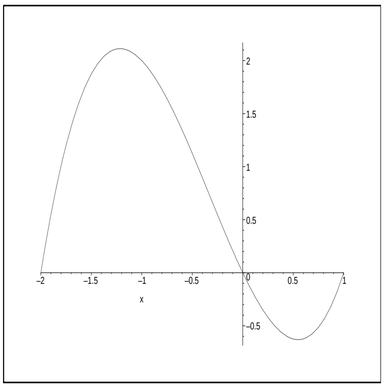
Ved lineær approksimasjon har vi derfor

$$N(4.1) \approx N(4) + N'(4)(4.1 - 4) = 100 + 3 \cdot 0.1 = 100 + 0.3 = 100.3.$$

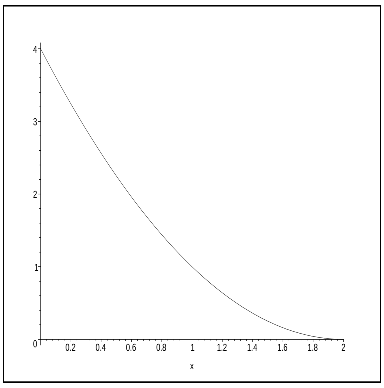
Oppgave 9 side 259: Her er endepunktene på grafen med.



Oppgave 10 side 259:



Oppgave 11 side 259: Her er endepunktene på grafen ikke med.



Oppgave 12 side 259: