LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 8, MA0001, H2007

Oppgave 29 side 243: Gitt kurven

$$x \ln y = y \ln x \tag{1}$$

For $x = 1$ er $1 \cdot \ln y = y \cdot \ln 1 = y \cdot 0 = 0$. Det vil si $\ln y = 0$. Altså er $y = 1$.

For å finne $\frac{dy}{dx}$, deriverer vi (1) implisitt med hensyn på x:

$$1 \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \ln x + y \cdot \frac{1}{x}.$$

Vi setter inn at $x = 1$ og $y = 1$ i punktet vårt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dx} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{1} \\ \frac{dy}{dx} &= 1 \end{aligned}$$

Ligningen for tangenten til kurven (1) i punktet $(1, 1)$ blir derved: $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$, det vil si: $\underline{y = x}$.

Oppgave 31 side 244:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Vi skal finne konstantene a, b og c slik at $p(-1) = 6$, $p'(1) = 8$ og $p''(0) = 4$. Vi har;

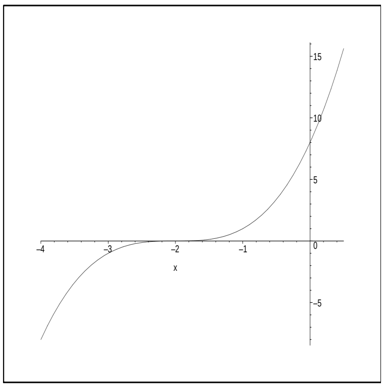
$$\begin{aligned} p(x) = ax^2 + bx + c \quad &\Rightarrow \quad p(-1) = a - b + c = 6 && (1) \\ p'(x) = 2ax + b \quad &\Rightarrow \quad p'(1) = 2a + b = 8 && (2) \\ p''(x) = 2a \quad &\Rightarrow \quad p''(0) = 2a = 4 && (3) \end{aligned}$$

Av (3): $\underline{a = 2}$.
Innsatt i (2): $2 \cdot 2 + b = 8 \quad \Rightarrow \quad b = 8 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = \underline{4}$.
Svar: $\underline{p(x) = 2x^2 + 4x + 8}$.

Oppgave 25 side 260:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)^3 \\ f'(x) &= 3(x + 2)^2 \cdot 1 = 3(x + 2)^2 \\ f'(-2) &= 3(-2 + 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Derfor er $f'(x) > 0$ på begge sider av $x = -2$, og grafen må se slik ut:

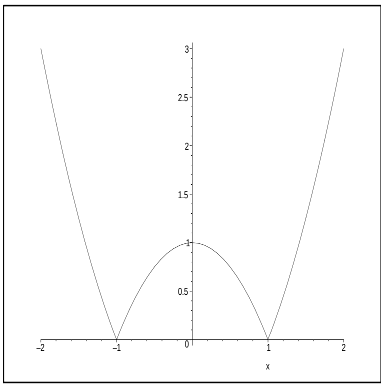


Oppgave 29 side 260: $f(x) = |x^2 - 1| \geq 0$ for alle x.
$f(-1) = 0$ og $f(1) = 0$. Siden funksjonsverdien aldri er lavere i noe punkt, er dette både globale og lokale minima.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{der} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{når } x^2 > 1 \\ 1 - x^2 & \text{når } x^2 < 1. \end{cases}$$

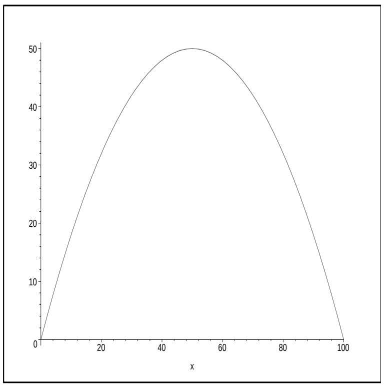
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - (1-h)^2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - (1 - 2h + h^2)}{h} = 2$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1-h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1 - 2h + h^2) - 1}{h} = -2$$

Siden de to grenseverdiene ikke er like, eksisterer ikke $f'(-1)$. At $f'(1)$ ikke eksisterer, vises på samme måte.
Grafen til funksjonen ser slik ut:



Oppgave 33 side 260: $\dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right), \quad t \geq 0.$

(a). Vi plotter dN/dt som funksjon av N når $r = 2$ og $K = 100$:



Maksimum inntreffer for $N = 50$.

(b). Vi setter $f(N) = \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) = rN - \dfrac{r}{K}N^2$

Da er $f'(N) = r - 2\dfrac{r}{K}N$.

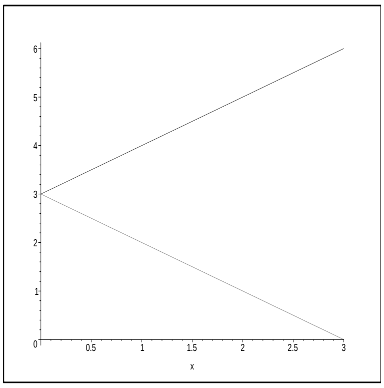
(c). $f'(N) = 0$ når $r = \dfrac{2r}{K} \cdot N$, det vil si, for $N = K/2$.

Oppgave 35 side 260: $f(x) = x^2 \quad \text{for } 0 \leq x \leq 2$.

(a): Stigningstall for linjen gjennom endepunktene $(0,0)$ og $(2,4)$ er $m = \dfrac{4-0}{2-0} = \underline{2}$.

(b). Et slikt tall eksisterer p.g.a. sekantsetningen. $f'(x) = 2x = 2$ holder for $\underline{x = 1}$.

Oppgave 51 side 261:



$B(0) = 3$ og $\left|\dfrac{dB}{dt}\right| \leq 1$. Da er $0 \leq B(3) \leq 3 + 3 = 6$ og $B(3) \geq 3 - 3 = 0$.

Oppgave 32 side 271:

$$
\begin{aligned}
f(P) &= \left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k} \\
f'(P) &= -k\left(1 + \frac{aP}{k}\right)^{-k-1} \cdot \frac{a}{k} < 0.
\end{aligned}
$$

Sannsynligheten avtar når P øker.

Oppgave 5 side 287:

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-x} \quad x \geq 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -e^{-x} < 0.
\end{aligned}
$$

Funksjonsverdien avtar når x øker. Maksimum (både absolutt og lokalt) oppnås derfor i $x = 0$. Minimum eksisterer ikke.

Oppgave 13 side 287:

$$
\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 6x + 2 \\
\frac{dy}{dx} &= x^2 + x - 6 = 0 \\
x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2x + 1 = \begin{cases} 5 & \text{for } x = 2 \\ -5 & \text{for } x = -3. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Derfor er det lokalt minimum i $x = 2$ og lokalt maksimum i $x = -3$.

$$\begin{aligned}
&f(2) = \tfrac{1}{3} \cdot 8 + \tfrac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot 2 + 2 = -\tfrac{16}{3}, \\
&f(-3) = -\tfrac{1}{3} \cdot 27 + \tfrac{1}{2} \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 2 = \tfrac{31}{2}. \\
&f(x) \to \infty \quad \text{når } \ x \to \infty, \\
&f(x) \to -\infty \quad \text{når } \ x \to -\infty.
\end{aligned}$$

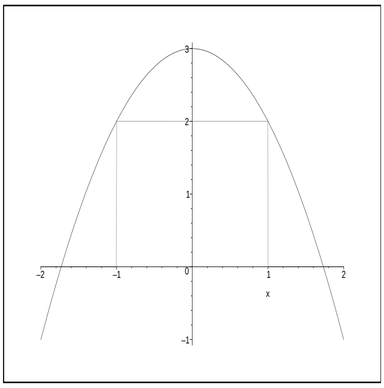
Altså har $f(x)$ ingen absolutte maksima eller minima.

Oppgave 31 side 287:

$$\begin{aligned}
&y = x + \cos x \\
&y = 1 - \sin x \geq 0 \quad \text{for alle } \ x.
\end{aligned}$$

Altså har f ingen ekstremalpunkter.

Oppgave 3 side 296: $y = 3 - x^2$.



La $(x, 0)$ og $(-x, 0)$ være hjørnepunktene på x-aksen, der $x \geq 0$. Da er $(x, 3 - x^2)$ og $(-x, 3 - x^2)$ de to hjørnepunktene på parabelen.

Arealet av rektanglet er:

$$A = \text{grunnlinje} \times \text{høyde} = 2x(3 - x^2) = f(x).$$

Det er klart at dette uttrykket for arealet gjelder for $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ fordi $(0, \sqrt{3})$ er et skjæringspunkt mellom parabelen og den reelle aksen. (Se figuren.) Siden $f(x)$ er kontinuerlig på det lukkede intervallet $[0, \sqrt{3}]$, har $f(x)$ et maksimum der. Det må enten ligge i et endepunkt eller i et kritisk punkt.

Endepunkt: I de to endepunktene 0 og $\sqrt{3}$ av intervallet er $f(0) = 0$ og $f(\sqrt{3}) = 0$.

Kritiske punkt: $f'(x) = 6 - 6x^2 = 0$ for $x^2 = 1$, det vil si for $x = 1$. $f(x)$ har alstå bare ett kritisk punkt. I dette punktet er $f(1) = 2(3-1) = 4$. Maksimalt areal er derfor $A = f(1) = \underline{4}$.