LØSNINGSFORSLAG FOR ØVING 9, MA0001, H2007

Oppgave 7 side 296: La θ være en av de spisse vinklene i trekanten. Da er

$$a = 5\cos\theta \quad \text{og} \quad b = 5\sin\theta,$$

og omkretsen av trekanten har lengde

$$\mathcal{O} = a + b + 5 = 5\cos\theta + 5\sin\theta + 5 = f(\theta).$$

Vi vil minimalisere $f(\theta)$ for $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Endepunkter:
$f(0) = 5\cos 0 + 5\sin 0 + 5 = 5\cdot 1 + 5\cdot 0 + 5 = 5 + 5 = 10$
$f(\frac{\pi}{2}) = 5\cos\frac{\pi}{2} + 5\sin\frac{\pi}{2} + 5 = 5\cdot 0 + 5\cdot 1 + 5 = 5 + 5 = 10$

Kritiske punkter:

$$\begin{aligned} f'(\theta) = -5\sin\theta + 5\cos\theta &= 0 \\ \sin\theta &= \cos\theta \\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \tan\theta = 1 \end{aligned}$$

som inntreffer når $\theta = \frac{\pi}{4}$. Siden

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = 5\cos\tfrac{\pi}{4} + 5\sin\tfrac{\pi}{4} + 5 = 5\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 5\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 5 = 5\sqrt{2} + 5 > 10,$$

har $f(\theta)$ minima for $\theta = 0$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$. Minste omkrets har derfor lengde 10 cm.

Kommentarer:

1. For $\theta = 0$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$ klapper trekanten sammen til et linjestykke av lengde 5. Når vi måler lengden av omkretsen til dette linjestykket, får vi 5 cm langs den ene siden pluss 5 cm langs den andre siden, slik at omkretsen har lengde 10 cm. Dette kunne vi egentlig se helt uten å gjennomføre optimaliseringen over.

2. Det er naturligvis en smaksak om vi vil kalle dette linjestykket for en trekant. Sunn fornuft og vanlig dagligtale tilsier at figuren bare er en rettvinklet trekant når $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. På dette intervallet har ikke $f(\theta)$ noe minimum. (For hver θ vi velger fra det åpne intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$, kan vi alltid finne andre θ fra intervallet der funksjonsverdien er mindre.) Konklusjonen blir da: omkretsens lengde vil alltid være større enn 10 cm.

Oppgave 11 side 296-297:

(a). La d være avstanden mellom punktene $(0,0)$ og (x,y). Ved den pytagoreiske læresetningen er

$$d^2 = x^2 + y^2.$$

Siden punktet (x,y) ligger på linjen $y = 4 - 3x$, må $y = 4 - 3x$. Derved gjelder

$$d^2 = x^2 + (4-3x)^2.$$

Vi tar kvadratrot på hver side av likhetstegnet og får

$$d = \sqrt{x^2 + (4-3x)^2}.$$

(b). Vi vil minimalisere $d = \sqrt{x^2 + (4-3x)^2} = f(x)$ for $-\infty < x < \infty$.
Vi har ingen endepunkter i intervallet.

<u>Kritiske punkter:</u>

$$f'(x) = \frac{2x + 2(4-3x)(-3)}{2\sqrt{x^2 + (4-3x)^2}} = 0.$$

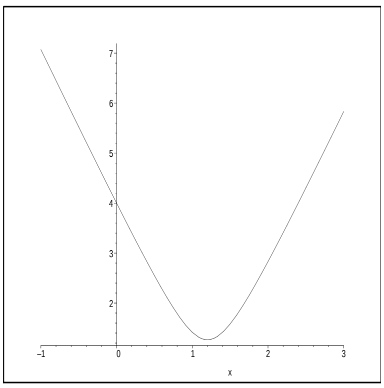
Nevneren er positiv for alle x. Telleren har formen

$$2x + 2(4-3x)(-3) = 2x - 6(4-3x) = 2x - 24 + 18x = 20x - 24.$$

Et fortegnsskjema viser at

$$f'(x) \text{ er } \begin{cases} > 0 & \text{for } x > \frac{6}{5} \\ = 0 & \text{for } x = \frac{6}{5} \\ < 0 & \text{for } x < \frac{6}{5} \end{cases}$$

Altså har grafen til $f(x)$ følgende fasong:



og oppnår sitt minimum for $\underline{x = \frac{6}{5}}$.

(c). At $d^2 = x^2 + (4-3x)^2$ har vi allerede vist. Siden $\sqrt{g(x)}$ øker/minker hvis og bare hvis $g(x)$ øker/minker, må minimum for $g(x)$ også inntreffe for $x = \frac{6}{5}$.

Oppgave 21 side 279-298: La $f(t)$ betegne andelen av avkommet som overlever når rugetiden var t, og la C være et uttrykk for belastningen ved å finne en make. Vi skal studere funksjonen

$$w(t) = \frac{f(t)}{C+t}$$

for $t \geq 0$, der vi antar at $f(0) = 0$, $0 \leq f(t) \leq 1$ og at grafen til $f(t)$ er konkav nedover, det vil si $f'(t)$ er en avtagende funksjon. Siden $f(0) \geq 0$ med $f(0) = 0$, kan ikke $f'(0) < 0$. **(a).** Vi søker maksimum for $w(t)$ for $t \geq 0$.

$$w'(t) = \frac{f'(t)(C+t) - f(t) \cdot 1}{(C+t)^2}$$

der nevneren er positiv for alle t. La $w(t_0)$ være et maksimum for $w(t)$. Da er $w'(t_0) = 0$. Det vil si at telleren i uttrykket for $w'(t)$ er lik 0 for $t = t_0$, altså

$$f'(t_0)(C+t_0) - f(t_0) = 0$$
$$f'(t_0) = \frac{f(t_0)}{C+t_0}.$$

På den annen side er stigningstallet for linjen som går gjennom to gitte punket $(-C, 0)$ og $(t,\, f(t))$ lik

$$m = \frac{f(t) - 0}{t - (-C)} = \frac{f(t)}{t+C}$$

Denne linjen **tangerer** grafen til $f(t)$ i punktet $(t,\, f(t))$ hvis og bare hvis stigningstallet er lik den deriverte i punktet, det vil si

$$m = \frac{f(t)}{t+C} = f'(t).$$

Det inntreffer akkurat for vår verdi $t = t_0$.

(b). Vi setter $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ og $C = 2$. Skal $w(t)$ ha et maksimum for $t = t_0$, må ifølge del **(a)** $f'(t_0) = f(t_0)/(t_0 + C)$. Vi har

$$f'(t) = \frac{1(1+t) - t \cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{og} \quad \frac{f(t)}{t+C} = \frac{t/(1+t)}{2+t}$$

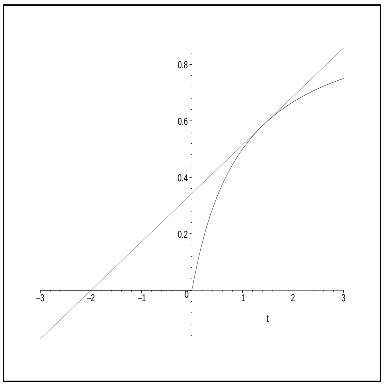
Skal disse to være like, må

$$2 + t = \frac{t}{1+t} \cdot (1+t)^2$$
$$2 + t = t(1+t)$$
$$2 + t = t + t^2$$
$$2 = t^2,$$

det vil si, $t = t_0 = \sqrt{2}$, slik at stigningstallet for tangenten blir

$$f'(t_0) = \frac{1}{(t_0+1)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}.$$

Figuren nedenfor viser grafen til $f(t)$ og linjen gjennom punktet $(-2, 0)$ som tangerer denne grafen. Tangeringspunktet avslører verdien for t som maksimerer $w(t)$.



Oppgave 13 side 307: $\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$ er et 0/0-uttrykk siden $a^0 = 1$ for $a \neq 0$. Vi kan derfor bruke L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x \ln(2) - 1}{3^x \ln(3) - 1}.$$

Nå er det ikke lenger et 0/0-uttrykk. Siden $2^x \to 1$ og $3^x \to 1$, får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1} = \frac{\ln(2) - 1}{\ln(3) - 1}.$$

Oppgave 17 side 307: $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ er et ∞/∞-uttrykk siden $\ln x \to \infty$ når $x \to \infty$. Vi kan derfor bruke L'Hopitals regel. Hvis vi er litt smartere (det er ikke nødvendig), finner vi først grenseverdien $L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$. Da er grenseverdien vi søker lik L^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Altså er også $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2} = 0^2 = 0$.

Oppgave 27 side 307: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x}$ er et $\infty\cdot 0$-uttrykk siden $\frac{1}{x}\to 0$ når $x\to\infty$ og $\sin 0 = 0$. Vi skriver derfor uttrykket som en brøk, slik at vi kan benytte L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\sin\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x^{1/2}\sin\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{-1/2}}.$$

Dette er et $0/0$-uttrykk. L'Hopitals regel kan derfor brukes hvis grenseverdien eksisterer. Hvis vi er litt smartere, erstatter vi x med $1/t$. Da er

$$\sin\tfrac{1}{x} = \sin t \quad \text{og} \quad x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2} = t^{1/2},$$

og når $x\to\infty$, vil $t\to 0^+$. Derfor gjelder

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\,\sin\tfrac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t^{1/2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t^{1/2}}\cdot\frac{t^{1/2}}{t^{1/2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{t^{1/2}} = 1\cdot\infty = \infty.$$

Oppgave 33 side 307: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$ er et 0^0-uttrykk som også er et såkalt ubestemt uttrykk. Vi vil derfor skrive uttrykket som en brøk, slik at vi kan benytte L'Hopitals regel. Dessverre får vi ikke det til direkte, så vi prøver om logaritmen til uttrykket kan skrives som en slik brøk: La $L = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$ (dersom grenseverdien eksisterer). Da er

$$\ln L = \lim_{x\to 0^+}\ln x^{2x} = \lim_{x\to 0^+} 2x\cdot\ln x = 2\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$$

som er et ∞/∞-uttrykk. Ved L'Hopitals regel gjelder

$$\ln L = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}.$$

Vi forenkler uttrykket litt før vi fortsetter, ved å multiplisere teller og nevner i den siste brøken med x^2. Det gir

$$\ln L = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-2x) = 0.$$

Derved er

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{2x} = e^0 = 1.$$

Oppgave 47 side 308: $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,e^x$ er et $\infty\cdot 0$-uttrykk (med en minus foran, men det gjør ingen ting). Vi vil derfor skrive uttrykket som en brøk, slik at vi kan benytte L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to -\infty} x\,e^x = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}$$

der vi har erstattet x med $-t$. Dette er et ∞/∞-uttrykk, og vi kan bruke L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{t\to\infty} \frac{-t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{e^t} = 0.$$

Oppgave 50 side 308: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ er et 1^∞-uttrykk fordi $(x+1)/(x+2)\to 1$ når $x\to\infty$. Dette er også et ubestemt uttrykk. Vi vil derfor skrive uttrykket som en brøk, slik at vi kan benytte L'Hopitals regel. Som i oppgave 33 får vi ikke det til direkte, så vi prøver om logaritmen til uttrykket kan skrives som en slik brøk: La $L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$ (dersom grenseverdien eksisterer). Da er

$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{1/x}$$

som er et 0/0-uttrykk. Ved L'Hopitals regel gjelder

$$\begin{aligned}\ln L &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+2}{x+1}\cdot\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}\cdot x^2}{-1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x+2}\cdot x^2}{-1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x+1)(x+2)} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+1/x)(1+2/x)} = -1.\end{aligned}$$

Derved er $L = e^{-1} = 1/e$.

Oppgave 11 side 330: $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$.
Siden $(x^r)' = r\,x^{r-1}$, må den antideriverte av x^{r-1} være $x^r/r + C$. Siden $1 = x^0$, er den antidriverte av 1 lik $x^1/1 + C = x + C$. Derfor er den antideriverte til $f(x)$ lik

$$x - \frac{x^{-1}}{-1} + C = x - (-x^{-1}) + C = x + x^{-1} + C = x + \frac{1}{x} + C.$$

Oppgave 51 side 331: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2}$ for $x\geq 0$ med $f(1) = 2$.
Siden $(x^r)' = r\,x^{r-1}$, må den antideriverte av x^{r-1} være $x^r/r + C$. Derfor er

$$f(x) = 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{4\,x^{3/2}}{3} + C = \frac{4x\sqrt{x}}{3} + C$$

der den vilkårlige konstanten C må tilpasses slik at $f(1) = 2$. Vi har $f(1) = 4\cdot 1/3 + C$ som er lik 2 når $C = 2 - 4/3 = 2/3$. Derfor er $f(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}$.

Oppgave 63 side 331: $\dfrac{dL}{dx} = L'(x) = e^{-0.1x}$ for $x \geq 0$ med $\lim_{x\to\infty} L(x) = 25$.
Siden $(e^{ax})' = e^{ax} \cdot a$ når a er en gitt konstant, så er den antideriverte til e^{ax} lik $e^{ax}/a + C$. Derfor er

$$L(x) = \frac{e^{-0.1x}}{-0.1} + C = -\frac{e^{-0.1x}}{0.1} + C = -\frac{10\,e^{-0.1x}}{1} + C = -10\,e^{-0.1x} + C$$

der den vilkårlige konstanten C må tilpasses slik at $\lim_{x\to\infty} L(x) = 25$. Vi har

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = -10 \cdot 0 + C = C.$$

Derfor må $C = 25$, og løsningen av problemet er $L(x) = 25 - 10\,e^{-0.1x}$.