Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen tlf. 93548

EKSAMEN I MA0001 BRUKERKURS A I MATEMATIKK

Bokmål
Mandag 17. desember 2007
kl. 9–13
Hjelpemidler (kode A): Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler, én lommeregner
Sensur: 17. januar 2008

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn grenseverdien eller forklar hvorfor den ikke eksisterer:

$$(i) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{-x}} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x\to\infty} (\ln x)e^{-x}.$$

Oppgave 2

a) En algeart i Nordsjøen ble estimert til å øke med 16 % i løpet av et år. Vi antar slik økning skjer hvert år. Hvor mange år tar det før bestanden er (minst) fordoblet?

b) En gutt kjøpte en moped på sin 16 årsdag, 2. januar. Mopeden kostet 10 000 kroner, et beløp han lånte fra et kredittselskap på følgende vilkår:

- en rente på 16 % ble lagt til lånet ved slutten av året hvert år,
- betaling av renter og avdrag kunne utsettes til det var gått 10 år.

Gutten valgte å benytte seg av muligheten til ikke å betale noe tilbake til kredittselskapet de første 10 årene. Hvor lang tid tok det før lånet passerte 20 000 kroner?

Hvor stort var lånet blitt på guttens 26 årsdag?

Oppgave 3 En parabel er gitt ved ligningen

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

der konstantene a, b og c er valgt slik at parabelen går gjennom de tre punktene $(1, 2)$, $(0, 1)$ og $(-1, 4)$.

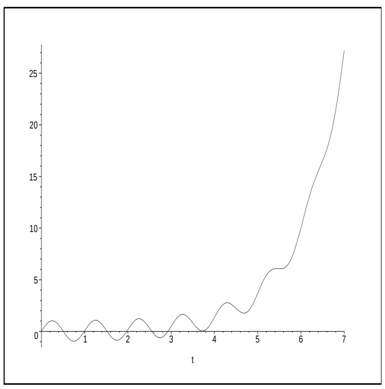
Finn verdiene til a, b og c.

Oppgave 4

a) Temperaturen i Andeby blir målt kontinuerlig. I den første uken av juli 2007 var den gitt ved

$$T(t) = 10\,e^{t-6} + \sin 2\pi t$$

som funksjon av tiden t målt i døgn. Figuren nedenfor viser grafen til denne funksjonen.

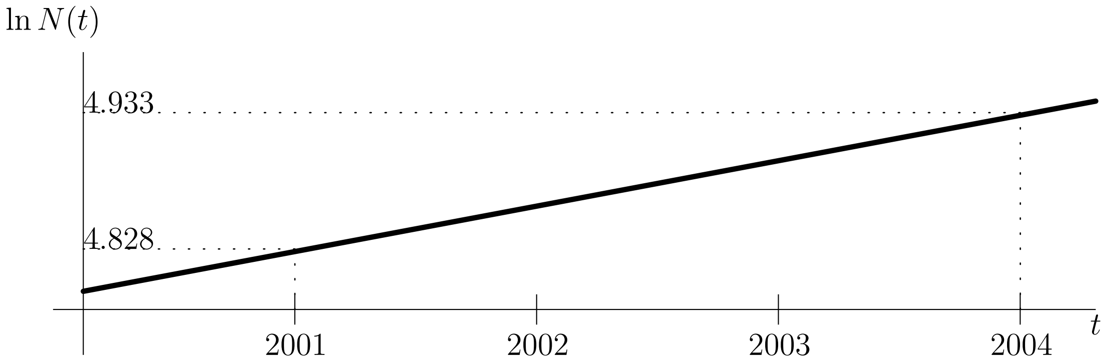


Hva var gjennomsnittstemperaturen i Andeby denne perioden?

b) Tilfeldigvis fulgte temperaturen i Andeby akkurat samme kurve også i den andre uken av juli 2007.

Hva var gjennomsnittstemperaturen i Andeby for de to første ukene av juli samlet?

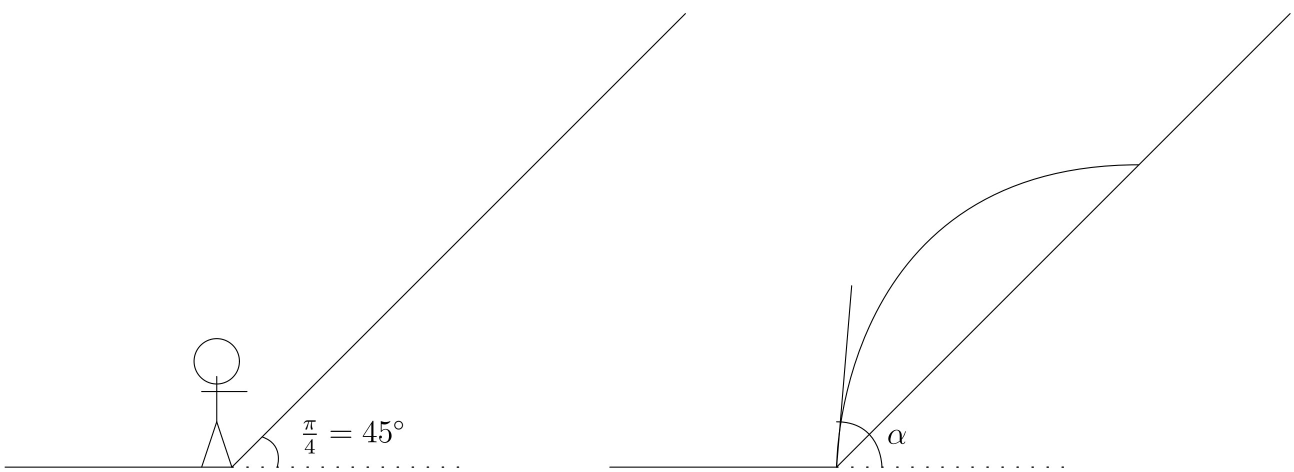
Oppgave 5 La $N(t)$ betegne (det omtrentlige) antall millioner innbyggere i Nigeria ved tidspunkt t målt i år. Årlige tellinger ga følgende logaritmiske graf for $N(t)$:



Vi antar at denne veksten fortsetter frem til år 2020.

Finn et eksplisitt uttrykk for $N(t)$ som funksjon av t for $2000 \leq t \leq 2020$.

Oppgave 6 Du står ved foten av en bakke som vist på den første figuren:



Du skal kaste en ball opp i bakken. Kastet skjer akkurat ved tidspunkt $t = 0$. Vi regner med at luftmotstanden er neglisjerbar, slik at i horisontal retning har ballen konstant hastighet lik

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$

og i vertikal retning har ballen hastighet

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

som funksjon av tiden t (målt i sekunder), der v_0 er utgangshastigheten, α er utgangsvinkelen (altså vinkelen mellom horisontallinjen og ballens bane i startøyeblikket som vist på figuren) og $g = 9.8\, m/s^2$ er tyngdens akselerasjon.

Vi regner også med at din høyde er neglisjerbar, slik at ballens bane starter i bunnen av bakken, som vist på den andre figuren.

a) Legg bakken og ballens bane inn i et (og samme) koordinatsystem. Beregn ballens posisjon i dette koordinatsystemet ved tidspunkt t mens ballen enda er i svevet.

b) Vis at ballen lander

$$\frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)\,\text{sekunder}$$

etter at den ble kastet.

(Hint: Husk at ballen lander idet den treffer bakken.)

c) Hvilken utgangsvinkel α må du velge for at ballen skal lande lengst mulig oppe i bakken?

(Hint: I beregningene kan det være at du får bruk for formlene

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \quad \text{og} \quad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha.)$$