Løsningsforslag, Øving 1
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

9. september 2008

1 Oppgave 1

Skissér grafen til likningen

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 1 = 0. \tag{1}$$

Løsning: Likningen for en sirkel med sentrum i (x_0, y_0) og radius $r > 0$ i planet er gitt ved (se avsnitt 1.1.3, side 7 i boka)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

Skriver vi dette ut får vi

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - r^2 = 0 \tag{3}$$

Ved å dele likning (1) med 4 får vi

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} = 0 \tag{4}$$

som har samme form som (3) for passende valg av (x_0, y_0) og r. Vi kan finne verdien av disse ved å danne fullstendige kvadrater; vi leser av koeffisienten foran x og y og ser at $2x_0 = 1$, så $x_0 = \frac{1}{2}$; tilsvarende må $y_0 = \frac{1}{2}$. Siden

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{2^2}$$

ser vi at $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2^2}$. Helt tilsvarende for leddene som inneholder y. Likningen (1) er dermed ekvivalent med

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4} &= \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Dette er altså en sirkel med sentrum i punktet $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og radius $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

2 Læreboka side 14-17

3(d). *Løs likningen*

$$|7-3x| = -2. \tag{5}$$

Løsning: Siden $|7-3x| \geq 0$ for alle x og høyre side er negativ har likningen *ingen løsning.*

4(c). *Løs likningen*

$$\left|4+\frac{t}{2}\right| = \left|\frac{3}{2}t-2\right| \tag{6}$$

Løsning: Anta først at $4+\frac{t}{2}$ og $\frac{3}{2}t-2$ har samme fortegn. Siden absoluttverdiene skal være like (likning (6) må være oppfyllt), har vi

$$\begin{aligned}4+\frac{t}{2} &= \frac{3}{2}t-2\\ 6 &= \frac{1}{2}\Big(3t-t\Big)\\ t &= 6\end{aligned}$$

Altså er $t=6$ en løsning.

Alternativt har uttrykkene motsatt fortegn, og igjen, siden absoluttverdiene må være like, har vi:

$$\begin{aligned}4+\frac{t}{2} &= -\left(\frac{3}{2}t-2\right)\\ 4+\frac{t}{2} &= -\frac{3}{2}t+2\\ 2 &= -\frac{t}{2}-\frac{3}{2}t\\ 2 &= -\frac{4}{2}t = -2t\\ t &= -1\end{aligned}$$

Så den andre løsningen er $t=-1$.

5(a). *Løs ulikheten*

$$|5x-2| \leq 4. \tag{7}$$

Løsning: Ulikheten (7) er oppfyllt hvis og bare hvis (se boks på side 4 i læreboka)

$$-4 \leq 5x-2 \leq 4,$$

så $5x-2 \leq 4$, noe som medfører at

$$\begin{aligned}5x &\leq 4+2 = 6\\ x &\leq \frac{6}{5},\end{aligned}$$

og

$$5x \geq -4+2=-2$$
$$x \geq \frac{-2}{5}$$

Dette betyr at ulikheten (7) er tilfredstilt hvis og bare hvis

$$-\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$$

(Vi kan også uttrykke dette noe mer konsist ved å si at (7) er oppfyllt hvis og bare hvis $x \in \left[-\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$.)

6(b). *Løs ulikheten*

$$|3-4x| \geq 2. \tag{8}$$

Løsning: Ulikheten (8) er oppfyllt hvis og bare hvis (se boks på side 4 i læreboka)

$$3-4x \geq 2 \quad \text{eller} \quad 3-4x \leq -2.$$

Dette vil si at vi enten må ha

$$-4x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}.$$

eller

$$3-4x \leq -2 \Leftrightarrow -4x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$$

Merk at ulikhetstegnet må snus dersom man multipliserer med negative tall på begge sider. Igjen kan vi uttrykke dette mer konsist ved å si at (8) er oppfyllt hvis og bare hvis $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$.

14. *Bestem likningen på standardform for linjen som passerer gjennom punktene* $(1,-1)$ *og* $(4,5)$.

Løsning: Standardformen for en linje i planet er

$$Ax+By+C=0 \tag{9}$$

Merk at koeffisientene A, B, C ikke er entydig bestemt. Med andre ord, det finnes ikke kun *en* likning på formen (9) som beskriver en bestemt linje, det finnes mange: likningen $A_0x+B_0y+C_0=0$ beskriver *samme linje* som likningen $\lambda A_0x+\lambda B_0y+\lambda C_0=0$, forutsatt at $\lambda \neq 0$.

Punktene $(1,-1)$ og $(4,5)$ ligger på linjen, så vi må ha

$$A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C = 0 \tag{10}$$
$$A \cdot 4 + B \cdot 5 + C = 0 \tag{11}$$

Vi trekker (10) fra (11) og får

$$A \cdot (4-1) + B \cdot (5-(-1)) + C(1-1) = 3A + 6B = 0$$

Altså er $A = -2B$. Vi kan velge (f.eks) $A = 2$ (og dermed $B = -1$). Konstantleddet C bestemmes ved innsetting av et av punktene, f.eks $(1, -1)$:

$$A \cdot 1 + B \cdot (-1) + C = 2 + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -3$$

Så likningen

$$2x - y - 3 = 0 \tag{12}$$

beskriver linjen mellom $(1, -1)$ og $(4, 5)$.

28. *Bestem likningen (på standardform) for linjen som passerer gjennom punktet* $(1, 2)$ *og er parallell med linjen*

$$x - 3y - 6 = 0 \tag{13}$$

Løsning: To linjer, l_1 og l_2, er parallelle (skrives $l_1 \parallel l_2$) hvis og bare hvis de har samme stigningstall (se avsnitt 1.1.2 i læreboka). En linje (på standardform) $Ax + By + C = 0$ kan skrives $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, altså har den stigningstall $\frac{-A}{B}$. Vi kan således beskrive alle linjer som er parallelle med linjen $x - 3y - 6 = 0$ ved likningen $x - 3y + C_0 = 0$ for passende valg av C_0. Vi ønsker her å finne den linjen som passerer gjennom punktet $(1, 2)$, så vi må ha

$$1 - 3 \cdot 2 + C_0 = -5 + C_0 = 0$$

Dermed er $C_0 = 5$, så linjen vi er ute etter er gitt ved

$$x - 3y + 5 = 0 \tag{14}$$

32. *Bestem likningen (på standardform) for linjen som passerer gjennom punktet* $(-1, -1)$ *og står vinkelrett på linjen*

$$x - y + 3 = 0 \tag{15}$$

Løsning: Fra s. 7 i boka, vet vi at to linjer l_1 og l_2, med stigningstall m_1 og m_2, står vinkelrett på hverandre (skrives $l_1 \perp l_2$) hvis og bare hvis

$$m_1 m_2 = -1 \tag{16}$$

Stigningstallet for en linje (på standardform) $Ax + By + C = 0$ er $\frac{-A}{B}$.

La l være linjen gitt ved likning (2), med stigningstall $k = \frac{-1}{-1} = 1$, og la $l_\perp$ betegne linjen vi ønsker å finne. Vi betegner (det ukjente) stigningstallet til $l_\perp$ med m.

For at $l \perp l_\perp$ må vi ha $mk = m \cdot 1 = -1$ (likning (16)), noe som betyr at $m = -1$. Linjen $l_\perp$ kan dermed beskrives ved $y + x + D = 0$, for en konstant D som kan bestemmes utifra det oppgitte punktet $(-1,-1)$ som $l_\perp$ skal passere gjennom: innsetting gir

$$-1-1+D=-2+D=0,$$

så $D=2$ og linjen $l_\perp$ er dermed gitt ved

$$x+y+2=0$$

(se forøvrig innledende bemerkninger til oppgave 14. om entydighet).

46. *Anta at antall frø F en plante produserer er proporsjonal med biomassen M til den delen av planten som befinner seg over bakken. Finn likningen som relaterer F til M dersom en plante veier 217 g og har produsert 17 frø.*

Løsning: Det at F og M er proporsjonale (skrives også $F \propto M$) betyr at $F=kM$ for en konstant k. Dersom dette er tilfellet er $k=\frac{F}{M}$, og utifra de oppgitte dataene får vi $k=\frac{217}{17}$, altså er

$$F=\frac{217}{17}M$$

74(b). *Evaluer/forenkle eksponensialuttrykket*

$$\left(\frac{6^{5/2}6^{2/3}}{6^{1/3}}\right)^3$$

Løsning:

$$\begin{aligned}\left(\frac{6^{5/2}6^{2/3}}{6^{1/3}}\right)^3 &= \left(6^{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}\right)^3\\ &= \left(6^{\frac{5\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}}\right)^3 = \left(6^{\frac{17}{6}}\right)^3\\ &= 6^{\frac{17}{6}\cdot 3} = 6^{\frac{17}{2}}\end{aligned}$$

76(b). *Hvilket reellt tall x tilfredstiller*

$$\log_{1/4}(x)=2? \tag{17}$$

Løsning:

$$\log_{1/4}(x)=2 \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1^2}{4^2}=\frac{1}{16}$$

(Se forøvrig avsnitt 1.1.5 i læreboka.)

84(b). *Løs (for x) likningen*

$$\log_2(1-x)=3. \tag{18}$$

Løsning: Vi bruker at $\log_2(a)=x \Leftrightarrow a=2^x$. Det betyr at

$$\log_2(1-x)=3 \Leftrightarrow 1-x=2^3=8,$$

så $x=-7$.

3 Læreboka s. 43-48

21. *Bruk en graftegner til å tegne grafene til funksjonene f og g, gitt ved $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^4$, for $x \geq 0$ (sammen). For hvilke verdier av x er $f(x) > g(x)$ og når er $g(x) > f(x)$?*

    Løsning: Se fasit i læreboka. Vi kan også finne ut av dette uten å tegne graf: Anta først at $f(x) > g(x)$. Det vil si at

    $$x^2 > x^4 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) > 0$$

    Siden $x^2 \geq 0$ for alle x, må vi ha $1 - x^2 > 0$ og $x^2 > 0$, så $x \neq 0$ og

    $$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > x$$

    (Funksjonen $x \mapsto \sqrt{x}$ (definert for $x \geq 0$) er *monotont økende*, dvs. at $a < b$ medfører at også $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, så vi har derfor lov å ta kvadratroten av begge sider uten at ulikhetstegnet endres).

    Tilsvarende har vi $f(x) < g(x)$ dersom

    $$x^2 < x^4 \Leftrightarrow 0 < x^2(x^2 - 1)$$

    så $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$.

32. *En soppsykdom angriper et tre i midten av en frukthage. Vi antar at sykdommen deretter spres radielt utover med en konstant hastighet på 3 m pr. dag. Hvor stort område er angrepet etter henholdsvis 2, 4 og 8 dager? Skriv ned en likning som uttrykker arealet av det angrepene området som funksjon av tid (målt i dager), og vis at denne funksjonen er et polynom av grad 2.*

    Løsning: Radien r av det angrepne området som funksjon av tid t (her: antall dager passert siden spredningen startet) er gitt ved $r(t) = 3t$. Ved tid t er altså et sirkulært område med radius $r(t)$ angrepet, og dette har som kjent areal

    $$A(t) = \pi r(t)^2 = \pi(3t)^2 = 9\pi t^2$$

    Det er opplagt at dette er et 2. gradspolynom i t. Arealene ved $t = 2$ dager, $t = 4$ dager, og $t = 8$ dager kan nå finnes ved innsetting:

    $$\begin{aligned} A(2) &= 9\pi \cdot 2^2 = 36\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 113\,\mathrm{m}^2 \\ A(4) &= 9\pi \cdot 4^2 = 9 \cdot 16\pi = 144\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 452\,\mathrm{m}^2 \\ A(8) &= 9\pi \cdot 8^2 = 9 \cdot 64\pi = 576\pi\,\mathrm{m}^2 \approx 1810\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

44. *Monod's vekstfunksjon $r(N)$ beskriver vekst som en funksjon av næringskonsentrasjon N. Anta at*

    $$r(N) = a\frac{N}{k + N}, \qquad N \geq 0 \tag{19}$$

    der a, k er positive konstanter.

(a) *Hva skjer med $r(N)$ når N øker? Bruk dette til å forklare hvorfor a kalles metningsnivået.*

Løsning: Se eksempel 6, avsnitt 1.2 for diskusjon av denne funksjonen. Grafen er vist på figur 1.20 i læreboka, og vi ser av denne at $r(N)$ nærmer seg a når N blir svært stor, i tillegg til at grafen flater ut og ligner mer og mer på en horisontal linje.

Dette er heller ikke vanskelig å se direkte utifra uttrykket for funksjonen; dersom N blir tilstrekkelig stor, slik at k er nærmest ubetydelig i forhold, har vi

$$\frac{N}{k+N} \approx 1$$

Dette kan gjøres mer presist ved hjelp av grenser (som strengt tatt ikke er gjennomgått ennå, så følgende er for spesielt interesserte): Vi skriver først:

$$r(N) = \frac{aN}{k+N} = \frac{aN}{N(\frac{k}{N}+1)} = \frac{a}{1+\frac{k}{N}}$$

Da har vi:

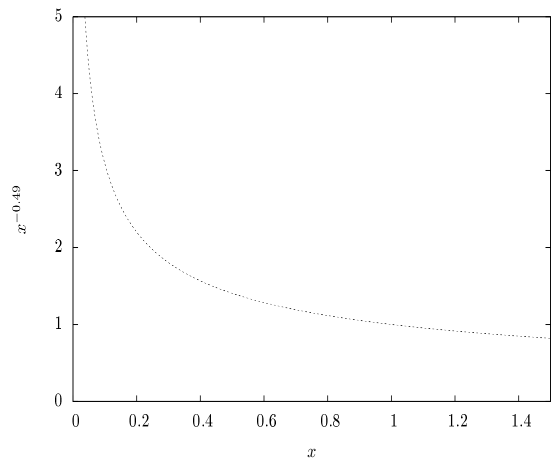
$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} r(N) &= \lim_{N\to\infty} \frac{a}{1+\frac{k}{N}} \\ &= \frac{\lim_{N\to\infty} a}{\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{k}{N}\right)} \\ &= a\end{aligned}$$

Vi har her brukt reglene på s. 124 og det faktum at $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{k}{N}\right) = 1 + \lim_{N\to\infty}\frac{k}{N} = 1 + 0 = 1$. Vi kan få mer informasjon ved å se på den deriverte (igjen, ikke gjennomgått ennå, så dersom dette er totalt uforståelig er det ingen grunn til panikk):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,r(N)}{\mathrm{d}\,N} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}\left(\frac{aN}{k+N}\right) = \frac{a}{k+N} - \frac{aN}{(k+N)^2} \\ &= \frac{a}{k+N}\left(1-\frac{N}{k+N}\right)\end{aligned}$$

Av dette ser vi at funksjonen er økende (den deriverte m.h.p. N er alltid positiv), men at den flater ut når $N \to \infty$ (dette følger av at $\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{d}\,r(N)}{\mathrm{d}\,N} = 0$).

Dermed er bruken av betegnelsen “metningsnivå” (eng: saturation level) rimelig: Når næringskonsentrasjonen blir stor nok, flater veksten ut, og økningen i vekst som kan oppnås ved selv enorme næringstilsudd blir etterhvert ørsmå.



Figur 1: Grafen til funksjonen fra oppg. 54

(b) *Vis at k beskriver næringskonsetrasjonen ved halvveis metning, dvs. at dersom $N = k$ er $r(N) = \frac{a}{2}$.*

Løsning: Dette gjøres ved innsetting:

$$r(k) = a\frac{k}{k+k} = a\frac{k}{2k} = a\frac{1}{2}$$

54. *I et utvalg basert på 28 arter, var volumbrøken av porøst mesofyll proporsjonal med* $(\text{bladtykkelse})^{-0.49}$. *Dersom bladtykkelsen øker, vil proporsjonen av porøst mesofyll øke eller minke?*

Løsning: Funksjonen $T \mapsto T^{\lambda}$ er økende for alle $\lambda > 0$ og $T > 0$, noe som kan ses ved derivasjon (som ikke er gjennomgått ennå, så dersom du ikke forstår alt dette er det helt uproblematisk).

$$\frac{\mathrm{d}T^{\lambda}}{\mathrm{d}T} = \lambda T^{\lambda - 1}$$

som er positiv for $\lambda > 0$ og $T > 0$. Siden $T^{0.49}$ er økende som funksjon av T, vil $T^{-0.49} = \frac{1}{T^{0.49}}$ være minkende som funksjon av T.

Alternativt kan man (og dette er også trolig intensjonen med oppgaven) simpelthen tegne grafen til $T \mapsto T^{-0.49}$ for $T > 0$ og sjekke. Se figur (1).

63. *Polonium 210 (*Po^{210}*) har en halveringstid på 140 dager.*

(a) *Dersom en prøve av* Po^{210} *har masse* 300 *mikrogram (*$300 \cdot 10^{-3} g = 3 \cdot 10^{-8} kg$*), finn en formel for massen (av Polonium 210 igjen i prøven) etter t dager.*

Løsning: (Se eksempel 10, avsnitt 1.2 i læreboka) Vi betegner massen (av Po^{210}) i prøven som funksjon av tiden med $W(t)$. Dersom prøven opprinnelig har masse W_0, er $W(t)$ gitt ved

$$W(t) = W_0 e^{-\lambda t}, \qquad \lambda > 0$$

Konstanten $\lambda > 0$ kalles *nedbrytningsraten*. Vi kjenner $W_0 = 3 \cdot 10^{-8} kg$, men vi må også vite hva λ er; dette finner vi fra halveringstiden. Det å si at halveringstiden er 140 dager er ekvivalent med at $W(140) = \frac{W_0}{2}$. Dvs. at

$$\begin{aligned} W(140) = \frac{W_0}{2} &= W_0 e^{-\lambda \cdot 300} \\ \frac{1}{2} &= e^{-140\lambda} \\ \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-140\lambda} &= -140\lambda \\ \lambda &= \frac{-1}{140}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{\ln 2}{140} \end{aligned}$$

Dermed er funksjonen vi søker gitt ved

$$\begin{aligned} W(t) &= 3 \cdot 10^{-8} e^{-\frac{t \ln 2}{140}} \\ &= 3 \cdot 10^{-8} \left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{140}} \\ &= 3 \cdot 10^{-8} \left(\frac{1}{2}\right)^{t/140} \end{aligned}$$

(b) *Hvor lang tid tar det før prøven har nådd* 20 % *av den opprinnelige mengden* Po^{210}*?*

Løsning: La oss betegne denne (ukjente) tiden med t_{20}. Vi ønsker altså å løse likningen $W(t_{20}) = 0.20 W_0$ for t_{20}. Vi setter inn

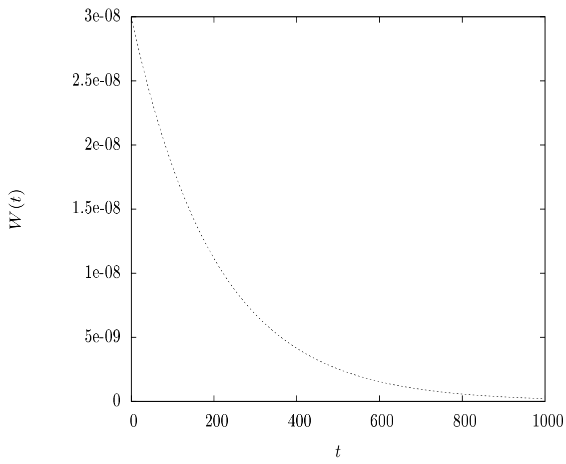
$$\begin{aligned} 0.20 W_0 &= W_0 e^{-t_{20}\frac{\ln(2)}{140}} \\ 0.20 &= e^{-t_{20}\frac{\ln 2}{140}} \\ \ln 0.20 &= \ln\left(e^{-t_{20}\frac{\ln 2}{140}}\right) \\ &= -t_{20}\frac{\ln 2}{140} \end{aligned}$$

Dermed er

$$t_{20} = \frac{-140\ln(0.2)}{\ln 2} \text{dager} \approx 325 \, \text{dager}$$

(c) *Skisser grafen for massen av opprinnelig* Po^{210} *igjen som funksjon av* t.

Løsning: Se figur (2).



Figur 2: Gjenværende Po^{210} i prøven (i kg.) som funksjon av tiden (dager)

66. *Alderen til steiner av vulkansk opprinnelse kan estimeres ved bruk av isotoper av argon 40* (Ar^{40}) *og kalium 40* (K^{40}). K^{40} *brytes ned til* Ar^{40} *over tid. Dersom et mineral, som inneholder kalium, begraves under de rette betingelsene, dannes argon (som ikke kan unnslippe). Siden argon drives vekk når mineralet varmes til svært høye temperaturer, vil ikke stein av vulkansk opprinnelse inneholde noe argon når de dannes. Mengden av argon man finner i slike steiner kan dermed brukes til å datere dem. Anta at en prøve av vulkansk stein inneholder* 0.00047 % K^{40} *og* 0.000079 % Ar^{40}. *Hvor gammel er steinen? (Nedbrytningsraten for* K^{40} *til* Ar^{40} *er* 5.335×10^{-10} *pr. år.)*

    Løsning: Antagelsene her betyr at dersom man starter med N_0 atomer K^{40} ved $t = 0$, vil vi etter tid $t \geq 0$ ha igjen

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

atomer (dvs $N_0 - N(t)$ har blitt nedbrutt til argon 40). Det betyr at

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} &= \frac{N(t)}{N_0} \\ -\lambda t &= \ln \frac{N(t)}{N_0} \\ t &= -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N(t)}{N_0} \end{aligned}$$

Dette vil si at tiden som har passert siden nedbrytningen startet kan regnes ut dersom man kjenner $\frac{N(t)}{N_0}$. Vi kjenner ikke N_0 direkte, men siden nedbrytningen foregår ved at et atom K^{40} går over til ett atom Ar^{40}, så er partikkeltallet bevart.

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{0.00047}{0.000079 + 0.00047}$$

og

$$t = -\frac{1}{5.335 \times 10^{-10} \frac{1}{\text{år}}} \ln(\frac{N(t)}{N_0}) \approx 291 \times 10^6 \text{ år}$$

79. *Finn inversen til funksjonen $f(x) = 2^x$, $x \geq 0$ og spesifiser definisjonsmengden. Tegn grafen til begge funksjonene i samme koordinatsystem.*

Løsning: Inversen $f^{-1}(x)$ må tilfredstille $f \circ f^{-1}(x) = x$ og $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ eller

$$2^{f^{-1}(x)} = x$$

Vi evaluerer $\log_2(\cdot)$ på begge sider (under den antagelse at $x > 0$.)

$$\begin{aligned} \log_2 2^{f^{-1}(x)} &= \log_2(x) \\ f^{-1}(x) &= \log_2(x) \end{aligned}$$

Vi ser også at $(f^{-1} \circ f)(x) = \log_2 2^x = x$, slik vi også må ha.

Inversen skal ha definisjonsmengde lik verdimengden til den opprinnelige funksjonen, så siden $f([0, \infty)) = [1, \infty)$, har inversen definisjonsmengde $[1, \infty)$. Grafene er tegnet i fasiten til oppgaven i læreboka.

81(d). *Forenkle uttrykket*

$$4^{(-2 \log_2 x)}$$

Løsning:

$$\begin{aligned} 4^{-2\log_2(x)} &= (2^2)^{-2\log_2(x)} = 2^{-4\log_2(x)} \\ &= (2^{\log_2(x)})^{-4} = x^{-4} = \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

82(e). *Forenkle uttrykket*

$$\log_{1/2}(8^{-x})$$

Løsning:

$$\log_{1/2}(8^{-x}) = -x \log_{1/2}(8) = -x \cdot (-3) = 3x$$

84(c). *Forenkle uttrykket*

$$e^{-2\ln(1/x)}$$

Løsning:

$$e^{-2\ln(1/x)} = \left(e^{\ln(1/x)}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = x^2$$

85(c). *Skriv uttrykket med grunntall e og forenkle*

$$2^{-x-1}$$

Løsning: Skriv $2^{-x-1} = e^y$, da er $y = \ln 2^{-x-1} = (-x-1)\ln 2$. Dvs,

$$2^{-x-1} = e^{-(x+1)\ln 2}$$

86(b) *Skriv uttrykket med grunntall e*

$$\log_3(5x+1)$$

Løsning: Sett $y = \log_3(5x+1)$, da er $3^y = 5x+1$ og $\ln 3^y = \ln(5x+1) = y \ln 3$, så

$$\log_3(5x+1) = \frac{\ln(5x+1)}{\ln 3}$$

(Dette er også et spesialtilfelle av den generelle formelen i boksen på side 38. i læreboka).