Løsningsforslag, Øving 10
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 392-395

18. *Anta at en endring i biomasse $B(t)$ ved tid t, $t \in [0, 12]$, følger ligningen*

$$\frac{\mathrm{d}\,B(t)}{\mathrm{d}\,t} = \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \tag{1}$$

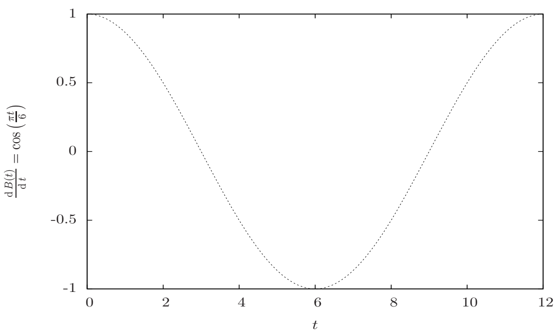
for $0 \leq t \leq 12$.

(a) *Tegn grafen til $\frac{\mathrm{d}\,B(t)}{\mathrm{d}\,t}$ som funksjon av t.*

(b) *Anta at $B(0) = B_0$. Uttrykk den kumulative endringen i biomasse over intervallet $[0, t]$ som et integral. Gi en geometrisk tolkning. Hva er verdien av $B(t)$ ved slutten av intervallet $[0, 12]$ sammenlignet med verdien i begynnelsen? Hvordan er disse kvantitetene relatert til den kumulative endringen i $B(t)$ over $[0, 12]$?*

Løsning:

(a). Se figur (1).



Figur 1: Grafen til $\frac{\mathrm{d}\,B(t)}{\mathrm{d}\,t}$.

(b). Den kumulative endringen i biomasse over $[0, t]$ kan uttrykkes som $B(t) - B(0)$, og fra fundamentalteoremet har vi

$$B(t) - B(0) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\, B(u)}{\mathrm{d}\, u}\, \mathrm{d}u = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u}{6}\right)\, \mathrm{d}u$$

Vi kan tolke dette på følgende måte: over et "lite" intervall $[a, b]$, med bredde $\Delta t = b - a$, vil verdien av $f'(t_0)\Delta t$ gi en god approksimasjon til den kumulative endringen i biomasse over $[a, b]$ ($t_0 \in [a, b]$). Den totale kumulative endringen approksimeres ved å dele opp intervallet $[0, t]$ i mange slike små intervaller og summere opp endringene over hvert delintervall. Den eksakte verdien finnes ved å regne ut grensen når delintervallenes bredde går mot 0, som er nøyaktig integralet vi har stilt opp over. Geometrisk er dette simpelthen arealet under grafen, naturlig nok med fortegn avhengig av fortegnet på $\frac{\mathrm{d}\, B(t)}{\mathrm{d}\, t}$ (dersom $\frac{\mathrm{d}\, B(t)}{\mathrm{d}\, t}$ er negativ på et lite intervall, skal den totale biomassen minke, og det er naturlig at bidraget til integralet av $\frac{\mathrm{d}\, B(t)}{\mathrm{d}\, t}$ over et slikt intervall blir negativt).

Verdien av differansen $B(12) - B_0$ finner vi ved å regne ut integralet over; $\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ er en antiderivert for integranden, og vi har dermed

$$\begin{aligned} B(12) - B_0 &= \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\, \mathrm{d}t = \left[\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right]_0^{12} \\ &= \frac{6}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi \cdot 12}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right)\right] \\ &= \frac{6}{\pi}(\sin(2\pi) - \sin(0)) = 0 \end{aligned}$$

Dette betyr at $B(12) = B_0$.

19. *En partikkel beveger seg langs x-aksen med hastighet*

$$v(t) = -(t-2)^2 + 1$$

for $0 \le t \le 5$. Anta at partikkelen befinner seg ved origo ved tid $t = 0$.

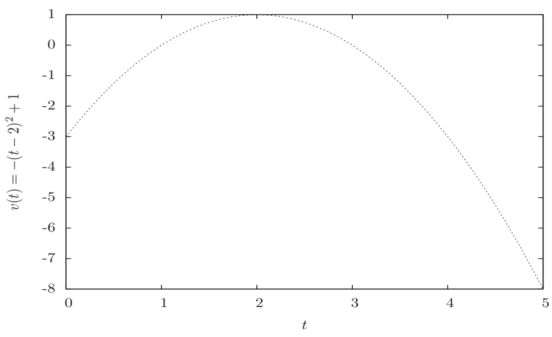
(a) *Tegn grafen til $v(t)$ som funksjon av t.*

(b) *Bruk grafen du tegnet i (a) til å bestemme når partikkelen beveger seg mot høyre og når den beveger seg mot venstre.*

(c) *Finn posisjonen $s(t)$ for partikkelen ved tid t, $0 \le t \le 5$. Gi en geometrisk tolkning av $s(t)$, med utgangspunkt i grafen til $v(t)$.*

(d) *Tegn grafen til $s(t)$, og finn posisjonen lengst til høyre og lengst til venstre.*

Løsning:



Figur 2: Grafen til $v(t)$ (fra oppgave 19(a)).

(a). Se figur (2).

(b). Ved $t = 0$ er $v(t)$ negativ, og partikkelen beveger seg dermed mot venstre. Hastigheten minker, til partikkelen snur idet $t = 1$ (der er $v(t) = 0$), og beveger seg så mot høyre til den igjen snur i $t = 3$ og beveger seg mot venstre i stadig økende hastighet frem til $t = 5$.

(c). Vi vet at $\frac{\mathrm{d}\, s(t)}{\mathrm{d}\, t} = v(t)$, så fra analysens fundamentalteorem (og det faktum at $s(0) = 0$, dvs at partikkelen befinner seg i origo ved $t = 0$) har vi

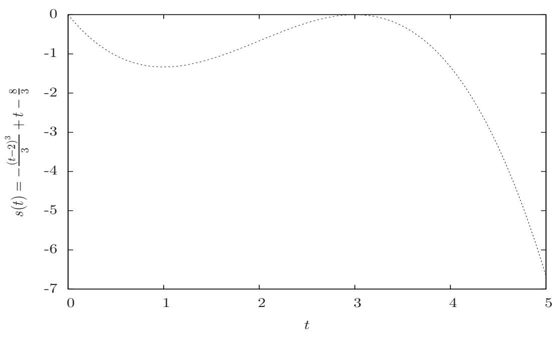
$$
\begin{aligned}
s(t) - s(0) = s(t) = \int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^t -(u-2)^2 + 1\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{-(u-2)^3}{3} + u\right]_{u=0}^{u=t} = -\frac{1}{3}(t-2)^3 + t - \frac{8}{3} \\
&= -\frac{1}{3}\left(t^3 - 3\cdot 2\cdot t^2 + 3\cdot 4\cdot t - 2^3\right) + t - \frac{8}{3} \\
&= -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3t
\end{aligned}
$$

Igjen kan altså $s(t)$ tolkes som arealet (med fortegn avhengig av om grafen ligger under eller over x-aksen), under grafen til $v(t)$, på tilsvarende måte som i oppgave 18 over.

(d). Se figur (3). Verdien til $s(t)$ i endepunktene finnes mest nøyaktig ved innsetting i funksjonen over (men kan også leses av grafen): $s(0) = -\frac{-8}{3} - \frac{8}{3} = 0$ og $s(5) = -\frac{(3)^3}{3} + 5 - \frac{8}{3} = -9 + 5 - \frac{8}{3} = -4 - \frac{8}{3} = -(6 + \frac{2}{3}) = -6.6666\ldots$.

20. *Akselerasjonen $a(t)$ for en partikkel som beveger seg i en rett linje er den instantane endringsraten i hastigheten $v(t)$ (med hensyn på tiden), dvs,*

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\, v(t)}{\mathrm{d}\, t}$$



Figur 3: Grafen til $s(t)$ (oppgave 19(d)).

Anta at $a(t) = 32\text{ft.}/\text{s}^2$ *(bruk gjerne* m/s^2*). Uttrykk den kumulative endringen i hastighet over* $[0, t]$ *som et bestemt integral, og regn ut dette integralet.*

Løsning:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\, v(t)}{\mathrm{d}\, t}\, \mathrm{d}t = \int_0^t 32\, \mathrm{d}t = [32t]_0^t = 32t$$

21. *Dersom* $\frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}$ *representerer vekstraten for en organisme ved tid* t *(målt i måneder), forklar hva*

$$\int_2^7 \frac{\mathrm{d}\, l}{\mathrm{d}\, t}\, \mathrm{d}t$$

representerer.

Løsning: Dette representerer kumulativ vekst over intervallet $[2, 7]$, dvs hvor mye organismen har vokst i perioden $t = 2$ måneder og $t = 7$ måneder.

22. *Dersom* $\frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, t}$ *representerer endringsraten i vekt for en organisme med alder* x*, forklar hva*

$$\int_3^5 \frac{\mathrm{d}\, w}{\mathrm{d}\, x}\, \mathrm{d}x$$

betyr.

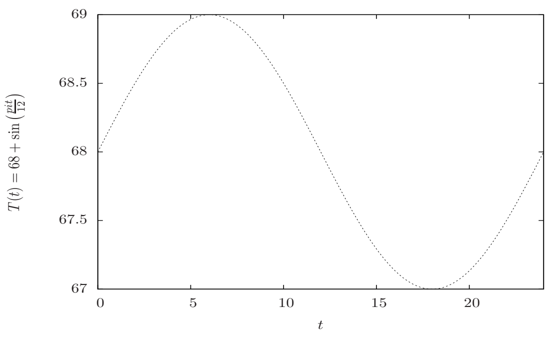
Løsning: Dette betyr organismens totale vektendring fra alder 3 til alder 5.

23. *Dersom* $\frac{\mathrm{d}\, B}{\mathrm{d}\, t}$ *representerer endringsraten for biomasse ved tid* t*, forklar hva*

$$\int_1^6 \frac{\mathrm{d}\, B}{\mathrm{d}\, t}\, \mathrm{d}t$$

betyr.

Løsning: Dette betyr total endring i biomasse fra tid $t = 1$ til tid $t = 6$.



Figur 4: Grafen til $T(t)$ (oppgave 27(a).)

27. *Anta at temperaturen T i et vekstkammer (målt i Fahrenheit) varierer over en 24-timers periode i henhold til*

$$T(t) = 68 + \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

for $0 \leq t \leq 24$.

(a) *Tegn grafen til temperaturen T som en funksjon av t.*

(b) *Finn gjennomsnittstemperaturen og forklar svaret ditt grafisk.*

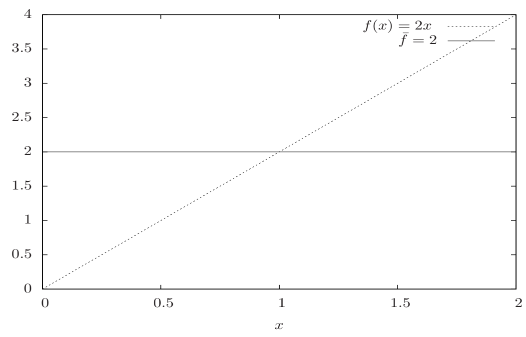
Løsning:

(a). Se figur (4).

(b). Gjennomsnittstemperaturen er gitt ved integralet av temperaturen over intervallet $[0, 24]$, delt på lengden av intervallet, dvs 24, altså

$$\begin{aligned}
\overline{T} &= \frac{1}{24}\int_0^{24} T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{24}\int_0^{24} 68 + \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{24}\left[68t + \frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]_{t=0}^{t=24} \\
&= \frac{68\cdot 24}{24} + \frac{12}{24\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 24}{12}\right) - \frac{68\cdot 0}{24} - \frac{12}{24\pi}\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{12}\right) \\
&= 68
\end{aligned}$$

Dette har en relativt enkel (geometrisk) forklaring; funksjonen $\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ er periodisk, og i løpet av en 24-timers periode grafen ligge over 0 på intervallet $[0, 12]$ og under 0 på intervallet $[12, 24]$; i tillegg er $\sin(x) = -\sin(-x) = -\sin(2\pi - x)$, så disse to bitene har samme areal (opp til fortegn). Dermed er integralet over en hel 24-timers periode lik 0 (se forøvrig grafen), som også er lik den totale endringen fra $t = 0$ til $t = 24$, slik at vi står igjen med et gjennomsnitt lik $68 = T(0)$.



Figur 5: Illustrasjon av gjennomsnittet $\bar{f}$ til $f(x)$ (oppgave 31).

31. *La $f(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 2$. Bruk et geometrisk argument for å finne gjennomsnittsverdien til f over intervallet $[0, 2]$, og finn x slik at $f(x)$ er lik gjennomsnittsverdien.*

    Løsning: Grafen til f danner en rett linje i planet mellom $(0, 0)$ og $(2, 4)$. Vi har

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$

og siden $\bar{f}$ kan omskrives $\bar{f} = \frac{1}{2} \int_0^2 \bar{f}\, \mathrm{d}x$, har vi

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) - \bar{f}\, \mathrm{d}x = 0$$

Så, rent geometrisk, kan problemet omformuleres til å finne en verdi $\bar{f}$ slik at en like stor del av grafen er over og under linjen $y = \bar{f}$, som illustrert på figuren (5).

Det er dermed geometrisk opplagt at $\bar{f} = 2$, noe som også kan vises ved å regne ut integralet over.

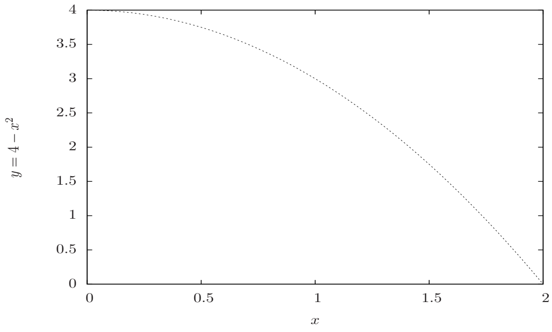
I oppgave 35, 37 og 43, finn volumet av legmet som fremkommer ved å rotere området begrenset av de oppgitte kurvene om x-aksen. Skissér området i planet, og en typisk sirkelskive.

35. $y = 4 - x^2$, $\quad y = 0$, $\quad x = 0$ (*(i første kvadrant.)*

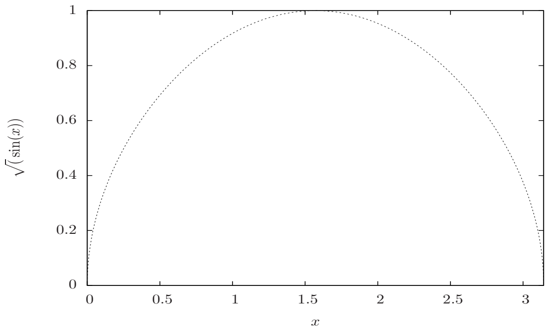
    Løsning: Se figur (6).

    Kurven skjærer x-aksen (dvs $y = 0$) der $x = 2$, så integrasjonsgrensene blir 0 og 2, og volumet er gitt ved

$$A = \int_0^2 \pi y(x)^2\, \mathrm{d}x = \int_0^2 \pi(4 - x^2)^2\, \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 16 - 8x^2 + x^4\, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \pi \left(32 - \frac{8}{3} \cdot 8 + \frac{1}{5} \cdot 32\right) = \frac{256\pi}{15}$$



Figur 6: Arealet i planet begrenset av $y = 4 - x^2$, $y = 0$ og $x = 0$.



Figur 7: Området begrenset av $y = \sqrt{\sin(x)}$, $0 \leq x \leq \pi$ (oppgave 37).

37. $y = \sqrt{\sin(x)}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y = 0.$
    Løsning: Se figur (7).

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \pi y(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \pi \sin(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot [-\cos(x)]_0^\pi = \pi \cdot (-(-1) + 1) = 2\pi \end{aligned}$$

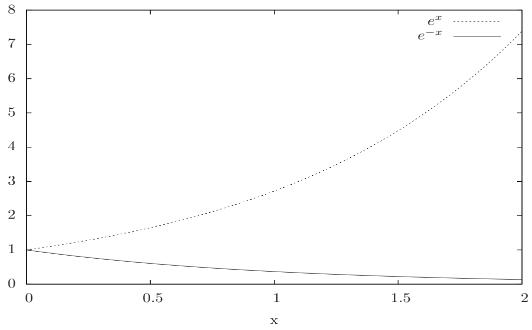
43. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 2.$
    Løsning: Se figur (8).

$$A = \int_0^2 \pi(e^{2x} - e^{-2x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left[e^{2x} - e^{-2x}\right]_0^2 = \frac{\pi(e^4 - e^{-4} - 2)}{2}$$

55. *Finn lengden av kurven*

$$y^2 = x^3$$

fra $x = 1$ *til* $x = 4$.



Figur 8: Området begrenset av $y = e^x$, $y = e^{-x}$ for $0 \leq x \leq 2$ (oppgave 43)

Løsning: $y^2 = x^3 \iff y = x^{3/2}$, og $y'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, så vi har at lengden av kurven er gitt ved (se formel på side 390)

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right] \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{9}{4} \cdot 1\right)^{3/2}\right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right) \end{aligned}$$