Løsningsforslag til øving 11

MA0001 Brukerkurs A

Oppgave 29 side 407: Substitusjonen $u = \frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}$ gir $\frac{du}{dx} = \frac{3\pi}{2}$, slik at $du = \frac{3\pi}{2}\,dx$ og derved $dx = \frac{2}{3\pi}\,du$.

Innsatt i integralet gir det

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)dx &= \int \sin u \,\frac{2}{3\pi}\,du = \frac{2}{3\pi}\int \sin u\,du \\ &= -\frac{2}{3\pi}\cos u + C = -\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

Oppgave 43 side 407: Substitusjonen $u = x^2 + 1$ gir $\frac{du}{dx} = 2x$, slik at $du = 2x\,dx$ og derved $dx = \frac{1}{2x}\,du$.

Innsatt i det tilsvarende ubestemte integralet gir det

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\ &= \frac{1}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C.\end{aligned}$$

Det bestemte integralet er derfor

$$\int_0^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 10\sqrt{10} - \frac{1}{3}\cdot 1\sqrt{1} = \frac{10\sqrt{10}-1}{3}.$$

Oppgave 47 side 407: Substitusjonen $u = (x-2)^2/2$ gir $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\cdot 2(x-2)\cdot 1 = x - 2$, slik at $du = (x-2)dx$ og derved $dx = \frac{1}{x-2}\,du$.

Innsatt i det tilsvarende ubestemte integralet gir det

$$\int (x-2)e^{-(x-2)^2/2}\,dx = \int e^{-u}\,du = -e^{-u} + C = -e^{-(x-2)^2/2} + C.$$

Det bestemte integralet er derfor

$$\int_2^5 (x-2)e^{-(x-2)^2/2}\,dx = \Big[-e^{-(x-2)^2/2}\Big]_2^5 = -e^{-9/2} + e^0 = 1 - e^{-9/2}.$$

Oppgave 15 side 414: Vi vil beregne det ubestemte integralet

$$\int x\ \sec^2 x\,dx$$

ved delvis integrasjon. Vi velger u=x og $v' = \sec^2 x$. Da er $u' = 1$ og $v = \tan x$ (fordi den deriverte av $\tan x$ er $1/\cos^2 x = \sec^2 x$). Derved gjelder

$$\int x\ \sec^2 x\,dx = x\tan x - \int 1\cdot\tan x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx.$$

Fra tabellen side 453 vet vi at

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

(Dette kunne vi også ha funnet ut ved å bruke substitusjonen $t = \cos x$ i integralet $\int \tan x\,dx = \int (\sin x)/(\cos x)\,dx$.)

Integralet er derfor

$$\int x\ \sec^2 x\,dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C.$$

Oppgave 17 side 414: Vi beregner først det ubestemte integralet

$$\int x\ \sin x\,dx$$

ved delvis integrasjon. Vi velger u=x og $v' = \sin x$. Da er $u' = 1$ og $v = -\cos x$. Derved gjelder

$$\int x\ \sin x\,dx = -x\cos x + \int 1\cdot\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x.$$

Det bestemte integralet er derfor

$$\int_0^{\pi/3} x\,\sin x\,dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\pi/3} = -\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + 0\cos 0 + \sin 0$$
$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}.$$

Oppgave 3 side 442: Integralet er uegentlig fordi integrasjonsintervallet er uendelig langt.

Vi ser først at
$$\int \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\tan^{-1}x + C.$$
(Dette står for eksempel i tabellen aller bakerst på permen i boken. Det står også side 228.)

Det uegentlige integralet er derfor gitt ved

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty}\Big[2\tan^{-1}x\Big]_0^T = \lim_{T\to\infty}(2\tan^{-1}T - 2\tan^{-1}(0)).$$

Nå er $\tan^{-1}x$ en kontinuerlig funksjon for alle reelle x med $\tan^{-1}0 = 0$ fordi $\tan 0 = 0$, og med $\lim_{T\to\infty}\tan^{-1}T = \pi/2$ fordi $\tan x \to \infty$ når $x \to \pi/2$.

Derfor er
$$\int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\,\frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Oppgave 19 side 443: Vi ser først at

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Det uegentlige integralet er derfor gitt ved

$$\int_0^4 \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{T\to 0^+}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_T^4 = \lim_{T\to 0^+}\left(-\frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{3T^3}\right).$$

Denne grenseverdien eksisterer ikke. (Uttrykket går mot ∞.) Derfor divergerer det uegentlige integralet.

Oppgave 35 side 443:

(a) Når $x \geq 1$, er $x^2 \geq x$ fordi x^2 er lik x multiplisert med et tall som er ≥ 1.

Derfor er $-x^2 \leq -x$.

Siden e^t er en voksende funksjon (funksjonsverdien vokser når t vokser), er derfor $e^{-x} \geq e^{-x^2}$.

At $e^{-x^2} \geq 0$ er opplagt, for $e^t > 0$ for alle reelle tall t, også de negative.

(b) Ved definisjon gjelder det at

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T e^{-x^2}\,dx.$$

Siden $e^{-x^2} > 0$ for alle x, er det klart at integralet

$$\int_1^T e^{-x^2}\,dx$$

er positivt for $T > 1$, og at verdien av integralet øker når T øker. (Tenk på integralet som arealet av området mellom kurven og x-aksen.) Derfor vil

- enten integralet vokse over alle grenser og gå mot uendelig når $T \to \infty$,
- eller så vil integralet konvergere mot et endelig tall.

Flere muligheter finnes ikke!

Vi skal vise at integralet konvergerer. Det er derfor nok å vise at det ikke vokser over alle grenser. Derfor skal vi vise det.

VET: $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ for alle x i integrasjonsintervallet.

DERFOR: $\int_1^T e^{-x^2}dx \leq \int_1^T e^{-x}dx$ for alle $T > 1$. Spesielt er

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T e^{-x^2}\,dx \leq \lim_{T\to\infty} \int_1^T e^{-x}\,dx.$$

Nå gjelder

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_1^T = \lim_{T\to\infty} \Big(-e^{-T} + e^{-1}\Big) = \frac{1}{e}.$$

Altså kan ikke integralet vokse over alle grenser. Integralet i oppgaven konvergerer derfor. (Hva det konvergerer mot er en annen sak, men det har de heldigvis ikke spurt om.)

Oppgave 37 side 443:

(a) For $x \geq 1$ er også $x^2 \geq 1$. Derfor er $1 + x^2 \leq x^2 + x^2 = 2x^2 < 4x^2$.

Det betyr at $\sqrt{1+x^2} < \sqrt{4x^2} = 2x$.

Det betyr igjen at $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > \dfrac{1}{2x}$.

Altså følger ulikheten i oppgaven for $x \geq 1$.

(b) Ved definisjon gjelder det at

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Siden integranden er positiv for alle x i integrasjonsintervallet, er det klart at integralet

$$\int_1^T \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

er positivt for $T > 1$, og at verdien av integralet øker når T øker. Derfor vil

- enten integralet vokse over alle grenser og gå mot uendelig når $T \to \infty$,
- eller så vil integralet konvergere mot et endelig tall.

Flere muligheter finnes ikke!

Vi skal vise at integralet divergerer, det vil si at verdien går mot uendelig når $T \to \infty$.

VET: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \dfrac{1}{2x} > 0$ for alle x i integrasjonsintervallet.

DERFOR: $\displaystyle\int_1^T \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx \geq \int_1^T \frac{1}{2x}\,dx$ for alle $T > 1$. Spesielt er

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geq \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{2x}\,dx.$$

Nå gjelder

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{2x}\,dx = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^T = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\Big(\ln T - 1\Big) = \infty.$$

Altså kan integralet i oppgaven absolutt ikke konvergere mot noen endelig verdi. Konklusjon: integralet divergerer.