Løsningsforslag Øving 2
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

15. september 2008

1 Oppgave 1

Skisser grafen til funksjonen $f_0(x) = \sin(x)$ og bruk denne som utgangspunkt til å skissere grafen til de oppgitte funksjonene f_1-f_7.

a). $f_1(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$:

Løsning: Se figur (1). Grafen til funksjonen $x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{2})$ simpelthen en translasjon av grafen til $\sin(x)$.

b). $f_2(x) = \sin(\pi x)$

Løsning: Se figur (2). Funksjonen $x \mapsto \sin(x)$ har periode 2π (altså $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$, noe som betyr at $\sin(\pi x)$ har periode 2, og dermed får bølgen en høyere frekvens.

c). $f_3(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

Løsning: Se figur (3).

d). $f_4(x) = \sin(\frac{2\pi x}{3})$.

Løsning: Se figur (4). Da $\frac{2\pi}{3} > 1$, får denne også kortere periode (og dermed høyere frekvens) enn $\sin(x)$, tilsvarende b) over.

e). $f_5(x) = x^2 \sin(x)$.

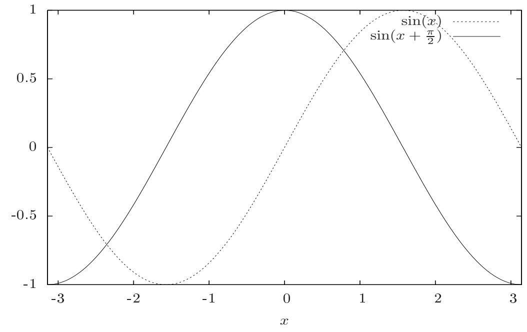
Løsning: Se figur (5).

f). $f_6(x) = \sin(-x)$.

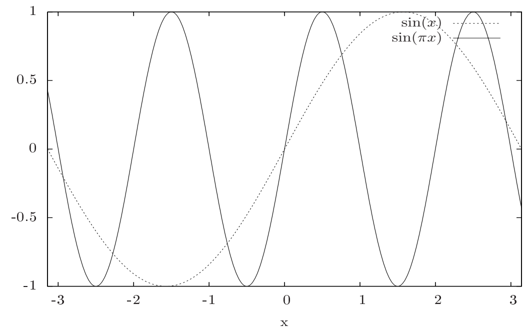
Løsning: Se figur (6). Dette vil simpelthen være $f_0(x)$ speilet om y-aksen.

g). $f_7(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$.

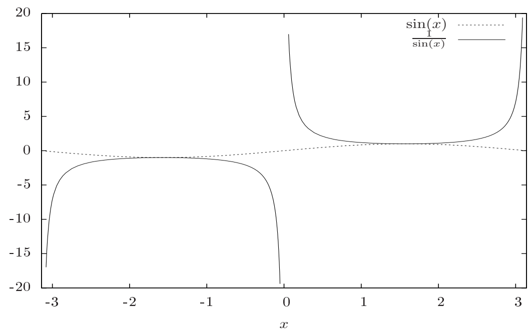
Løsning: Se figur (7).



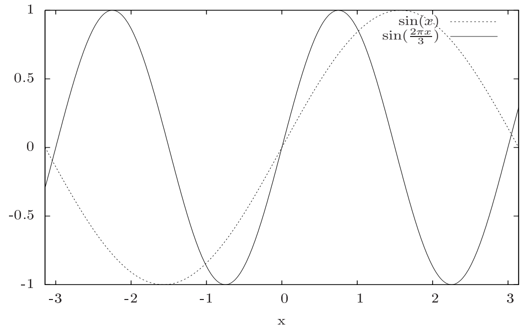
Figur 1: Oppgave 1a)



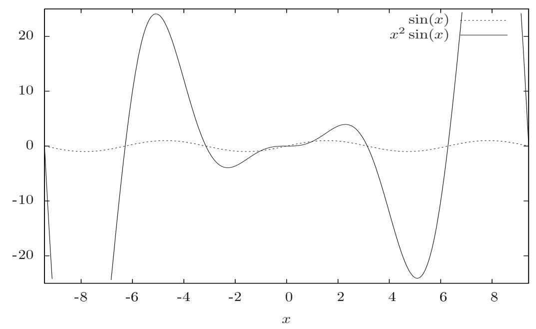
Figur 2: Oppgave 1b)



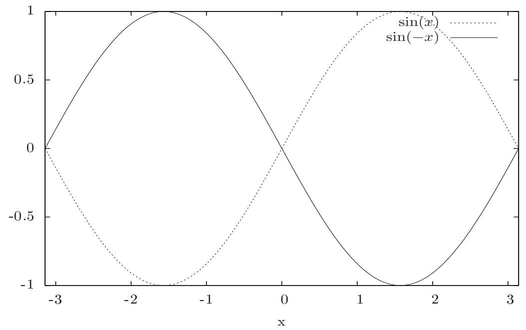
Figur 3: Oppgave 1c)



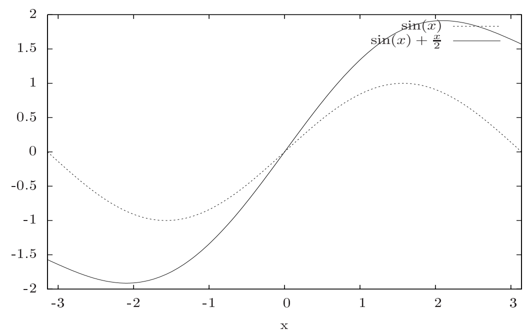
Figur 4: Oppgave 1d)



Figur 5: Oppgave 1e)



Figur 6: Oppgave 1f)



Figur 7: Oppgave 1g)

2 Læreboka, s. 43-48

56. *Anta at en kube (terning) med sidelengde L og volum V har masse M, og at $M = 0.35V$. Hvordan avhenger sidelengden til kuben av massen?*

    Løsning: En kube med sidelengde L, har volum $V = L^3$, dermed er $M = 0.35V = 0.35L^3$. Vi tar tredjeroten på begge sider av likhetstegnet, og får at

$$L = \left(\frac{M}{0.35}\right)^{1/3}$$

58. *Anta at en populasjon har størrelse ved tid t lik $N(t)$ og at $N(t)$ er gitt ved*

$$N(t) = 40 \cdot 2^t, \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

   a). *Finn populasjonsstørrelsen for $t = 0$.*

   Løsning: Dette gjøres ved innsetting:

$$N(0) = 40 \cdot 2^0 = 40 \cdot 1 = 40$$

   b). *Vis at*

$$N(t) = 40 \cdot e^{t \ln 2}$$

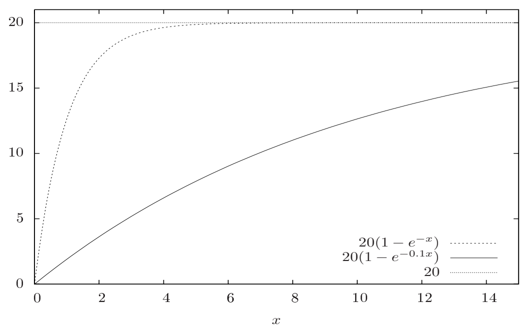
   Løsning: Dette er en enkel omskriving av uttrykket (1) (se evt. avsnitt 1.2.7 i læreboka):

$$N(t) = 40 \cdot 2^t = 40 \cdot e^{\ln(2^t)} = 40 \cdot e^{t \ln 2}$$

   c). *Hvor lang tid tar det før populasjonsstørrelsen når 1000?*

   Løsning: Vi ønsker altså å finne t_0 slik at $N(t_0) = 1000$. Vi må dermed løse likningen

$$N(t_0) = 1000 = 40 \cdot 2^{t_0}$$



Figur 8: $L(x)$ med $L_\infty = 20$, $k = 1$ og $k = -0.1$ (oppgave 68a).

Dette betyr at $\frac{1000}{40} = 25 = 2^{t_0}$, så

$$\log_2 25 = t_0 \log_2 2 = t_0 \cdot 1 = t_0$$

Dvs. at $t_0 = \log_2(25) = 2\log_2 5 \approx 4.64$. Problemet kan naturligvis også løses ved hjelp av naturlig logaritme (istedet for logaritme med grunntall 2). Vi kan istedet ta den naturlige logaritmen til hver side av ligningen $25 = 2^{t_0}$, som gir

$$\begin{aligned} \ln 25 &= t_0 \ln 2 \\ t_0 &= \frac{\ln 25}{\ln 2} \end{aligned}$$

68. Fisk vokser gjennom hele livet, og veksten kan beskrives ved von Bertalanffy-funksjonen

$$L(x) = L_\infty(1 - e^{-kx})$$

for $x \geq 0$ der $L(x)$ er lengde ved alder x og k og L_∞ er positive konstanter.

a). Grafen for $L(x)$ med $L_\infty = 20$ og begge verdiene av k, er vist på figur (8).

b). For $k = 1$, finn x slik at lengden er 90 % av L_∞. Gjenta for 99 % av L_∞. Kan en fisk noensinne oppnå lengden L_∞? Gi en tolkning av konstanten L_∞.

Løsning Vi ønsker altså å finne x slik at $L(x) = 0.9 \cdot L_\infty$ Vi setter inn

$$\begin{aligned} L(x) = L_\infty(1 - e^{-kx}) &= 0.9 \cdot L_\infty \\ 0.9 &= 1 - e^{-kx} \\ e^{-kx} &= 1 - 0.9 = 0.1 \\ -kx &= \ln 0.1 \end{aligned}$$

Dermed er $x = \frac{-1}{k} \ln 0.1$, så med $k = 1$ har vi $x = -\ln 0.1 \approx 2.30$. Vi kan gå gjennom tilsvarende prosedyre for $L(x) = 0.99 L_\infty$; det gir $x = -\ln 0.01 \approx 4.61$.

Vi ser her at fisken faktisk bruker (omtrent) like lang tid på å vokse fra 90 % til 99 % av lengden L_∞, som den bruker på å vokse de første 90 % av denne lengden. Dette betyr at veksthastigheten avtar jo nærmere L_∞ vi kommer.

Kan fisken noensinne nå lengden L_∞? Vel, la oss se; hvis $L(x) = L_\infty$, må vi ha $1 - e^{-kx} = 1$, altså $e^{-kx} = 0$. Denne ligningen har *ingen løsning*. Men vi har at $\lim_{x \to +\infty} e^{-kx} = 0$; så L_∞ er å betrakte som fiskens (omtrentelige) lengde for store verdier x (med andre ord: etter at svært lang tid har gått, vil lengden (som funksjon av tiden) være (omtrentlig) konstant og (omtrentlig) lik L_∞).

c). *Sammenlign grafene du fant i a). Hvilken vekstkurve vil nå 90 % av L_∞ raskest? Kan du forklare hva som skjer med kurven til L når du varierer k (for fiksert L_∞)?*

Løsning: $k = 1$ gir raskere vekst enn $k = 0.1$, så den første grafen vil nå 90 % av L_∞ raskest.

Jo større k blir, jo raskere går $e^{-kx} \to 0$. Så kurvene blir brattere (i starten, altså for små x) med økende k.

70. a). *Vis at funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ er en-til-en. Finn f^{-1} og dens definisjonsmengde.*

Løsning: Vi må vise at $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer $x_1 = x_2$. La $x_1 \in \mathbb{R}$ og $x_2 \in \mathbb{R}$. Dersom $f(x_1) = f(x_2)$ har vi

$$\begin{aligned} x_1^3 - 1 &= x_2^3 - 1 \\ x_1^3 &= x_2^3, \end{aligned}$$

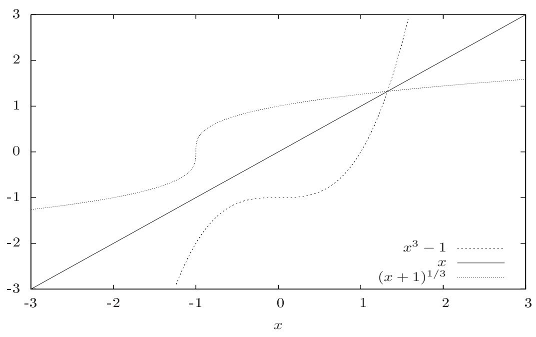
som bare holder dersom $x_1 = x_2$[1] og dermed er f en-til-en. Dermed vet vi at inversen eksisterer, og siden $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ har den definisjonsmengde $\mathbb{R}$.

For å finne inversen, sett $y = f(x) = x^3 - 1$. Siden inversen $f^{-1}(y)$ må tilfredstille $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, vil dette være et spørsmål om å løse følgende ligning for x:

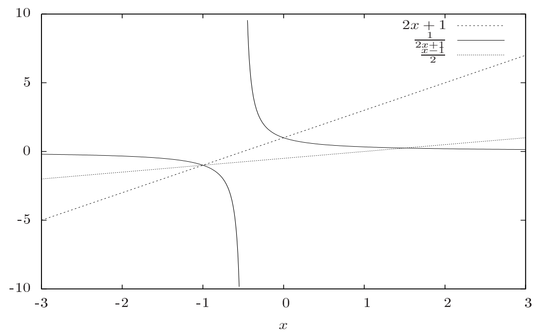
$$\begin{aligned} y &= f(x) = x^3 - 1 \\ y + 1 &= x^3 \\ x &= \sqrt[3]{y+1} = f^{-1}(y), \qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Den inverse funksjonen er derfor gitt ved $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}, x \in \mathbb{R}$.

[1] Dette er egentlig en konsekvens av at $x \mapsto x^3$ er en-til-en; se avsnitt 1.2.6 i læreboka, spesielt eksemplet som er illustrert på figur 1.27.



Figur 9: Funksjonen $f(x) = x^3 - 1$, dens invers $f^{-1}(x) = (x+1)^{1/3}$ og identitetsfunksjonen $(g(x) = x)$ (oppgave 70b).



Figur 10: $f(x)$, $1/f(x)$ og $f^{-1}(x)$ med $f(x) = 2x + 1$ (oppgave 74).

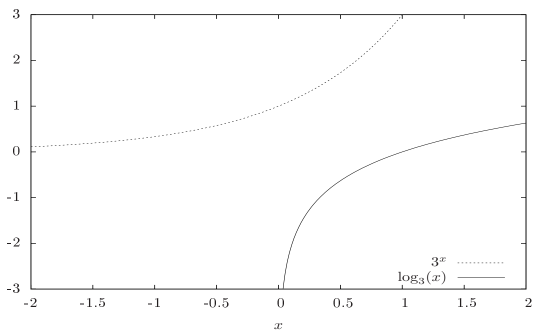
b). *Tegn grafen til $f(x)$ og $f^{-1}(x)$ i samme koordinatsystem, sammen med linjen $y = x$, og overbevis deg selv om at grafen til f^{-1} kan finnes ved å reflektere grafen til $f(x)$ om linjen $y = x$.* **Løsning:** Se figur (9).

74. *Gitt en funksjon f, kan vi definere den* resiproke funksjonen $\frac{1}{f(x)}$, *som også skrives $[f(x)]^{-1}$. Hensikten med oppgaven er å vise at dette ikke har noe med inversen til funksjonen å gjøre. Som et eksempel, la $f(x) = 2x+1$. Finn både $[f(x)]^{-1}$ og $f^{-1}(x)$ og sammenlign de to funksjonene. Tegn alle tre i samme koordinatsystem.*

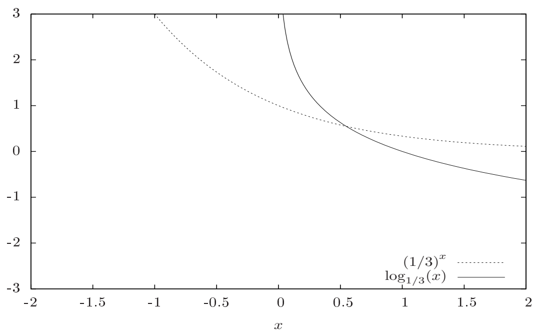
    Løsning: Vi har $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x+1}, \quad x \neq -\frac{1}{2}$, og $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$. Grafene er vist på figur (10).

75. *Finn inversen til funksjonen f, definert ved*

$$f(x) = 3^x,$$



Figur 11: Funksjonen $f(x) = 3^x$ og dens invers $\log_3(x)$ (oppgave 75).



Figur 12: Funksjonen $f(x) = (1/3)^x$ og dens invers (oppgave 78).

i tillegg til dens definisjonsmengde. Tegn deretter grafene til begge disse funksjonene i samme koordinatsystem.

Løsning: Funksjonen f er en-til-en og $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, så inversen eksisterer og er definert på $(0, \infty)$. Siden

$$3^{\log_3(x)} = x$$

så er $f^{-1}(x) = \log_3(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(3)}$. Grafene er tegnet i figur (11).

78. Finn inversen til $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Helt tilsvarende som over (oppgave 75), gir dette $f^{-1}(x) = \log_{1/3}(x)$, da $x = \log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Definisjonsmengden til inversen er igjen $f(\mathbb{R}) = \{\left(\frac{1}{3}\right)^x \ : \ x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$. Grafene er vist på figur (12).

3 Læreboka, s. 69-77

35. a). *Finn følgende tall på en tallinje med logaritmisk skala (grunntall* 10*):* 10^2, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-7} *og* 10^{-10}.

Løsning: $\log 10^2 = 2$, $\log 10^{-3} = -3$, osv ...

b). *Kan du finne 0 på en tallinje med logaritmisk skala?*

Løsning: Nei, $\log(0)$ er ikke definert (det eksisterer ikke noe tall y slik at $10^y = 0$).

c). *Kan du finne negative tall på en tallinje med logaritmisk skala?*

Løsning: Nei, $\log(x), \quad x \in \mathbb{R}$ er kun definert for $x > 0$ (igjen, det eksisterer ikke $y \in \mathbb{R}$ slik at $10^y < 0$).

43. *Når* $\log(y)$ *plottes som en funksjon av* x*, er resultatet en rett linje. Tegn en rett linje, gitt ved to punkter* $(x_1, y_1) = (0, 5)$ *og* $(x_2, y_2) = (3, 1)$*, i et* log-*lineært plott og bestem* y *som funksjon av* x.

Løsning: Vi har oppgitt at størrelsen y er en funksjon av x, og at $\log(y)$, som funksjon av x, er en rett linje. Dette betyr at

$$\log y = ax + b$$

for $a, b \in \mathbb{R}$. Dermed er

$$10^{\log y} = y = 10^{ax+b} = 10^b (10^a)^x$$

så relasjonen mellom y og x er på formen $y = c \cdot \lambda^x$, der $c = 10^b$ og $\lambda = 10^a$. Det er nå kun et spørsmål om å finne uttrykkene for linjen mellom de oppgitte punktene; vi vet at punktene $(0, 5)$ og $(3, 1)$ ligger på linjen, så

$$\begin{aligned} \log 5 &= a \cdot 0 + b \\ \log 1 &= a \cdot 3 + b \end{aligned}$$

Dermed er $b = \log 5$, og, siden $\log 1 = 0$, har vi

$$\begin{aligned} 0 &= 3a + b \\ a &= -\frac{b}{3} = -\frac{\log 5}{3} \end{aligned}$$

Linjen har dermed likning

$$u = \log y = -\frac{\log 5}{3} x + \log 5$$

Siden $y = 10^{\log y}$, kan vi nå uttrykke y ved hjelp av x:

$$\begin{aligned} y &= 10^{\log 5 - \frac{\log 5}{3} x} = 10^{\log 5} \left(10^{-\frac{1}{3}\log 5}\right)^x \\ &= 5 \cdot \left(10^{\log 5^{-1/3}}\right)^x = 5 \cdot 5^{-x/3} = 5^{1-x/3}. \end{aligned}$$

47. *Bruk en logaritmisk transformasjon for å finne et lineært forhold mellom y og x der $y = 3 \cdot 10^{-2x}$, og tegn det resulterende lineære forholdet i et* log*-lineært plott.*

Løsning: Vi ser at

$$\log y = \log(3 \cdot 10^{-2x}) = \log 3 + \log 10^{-2x} = -2x + \log 3$$

så $\log y$, som funksjon av x, er gitt ved en rett linje med stigningstall -2, som skjærer y-aksen i punktet $(0, \log 3)$.