Løsningsforslag Øving 3
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka, s. 127-128

Bestem følgende grenser ved hjelp av tabell eller graf.

7.
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2 \sec \frac{x}{3} \tag{1}$$

Løsning: (Merk at $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ per definisjon).

Vi har beregnet $f(x)$ for noen verdier av x i nærheten av $\frac{\pi}{2}$ i tabell (1). Resultatene der leder oss til å mistenke at

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2 \sec \frac{x}{3} \approx 2.309401,$$

noe som stemmer overens med fasiten $\frac{4}{3}\sqrt{3}$, men det er naturligvis tilnærmet umulig å gjette seg til det eksakte svaret på basis av tabell eller graf.

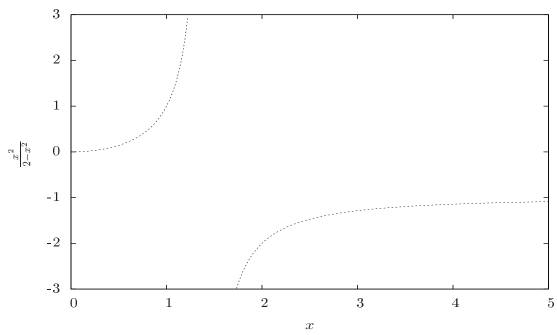
Vi kan gi en eksakt løsning på problemet, men dette krever bruk av noe mer sofistikerte teknikker enn det oppgaven ber oss om å bruke (men likevel ikke noe som er utenfor det man får bruk for på denne øvingen). Vi begynner med å merke oss at funksjonen

$$2 \sec \frac{x}{3} = \frac{2}{\cos \frac{x}{3}}$$

er kontinuerlig overalt, bortsett fra i nullpunktene til $\cos \frac{x}{3}$. Vi vet at $\cos \frac{x}{3} = 0$ hvis og bare hvis $\frac{x}{3} = n \cdot \frac{\pi}{2}$ for et heltall $n \neq 0$, og siden $\frac{\pi}{6}$ ikke er av denne formen, er funksjonen $\frac{2}{\cos \frac{x}{3}}$ kontinuerlig for $x = \frac{\pi}{2}$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.49π	2.295648	0.51π	2.323577
0.499π	2.308007	0.501π	2.310799
0.49999π	2.309387	0.50001π	2.309415
0.4999999π	2.309401	0.5000001π	2.309401

Tabell 1: $f(x) = 2 \sec \frac{x}{3}$ for x nær $\frac{\pi}{2}$ (oppgave 7, side 128).



Figur 1: Grafen til $f(x) = \frac{x^2}{2-x^2}$ (oppgave 18, side 127).

Hva har så dette med saken å gjøre? Jo, dersom $f(x)$ er kontinuerlig i $x = x_0$, vet vi at (se læreboka kap 3.2)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

så vi kan finne grensen simpelthen ved å sette inn $x = \frac{\pi}{2}$ og regne ut. Verdien av $\cos\frac{\pi}{6}$ er kjent og lik $\frac{\sqrt{3}}{2}$, og dermed blir

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2 \sec\frac{x}{3} &= \frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{3} = 2.309401076758503\ldots\end{aligned}$$

18.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2 - x^2}$$

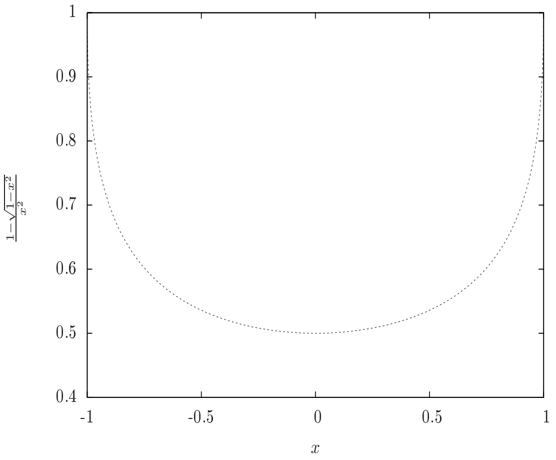
Løsning: Grafen er vist på figur (1); det ser utvilsomt ut til at

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2 - x^2} = -1$$

Dette er noe intuisjonen også vil bekrefte; dersom x er svært stor, er 2 praktisk talt ubetydelig i forhold til x^2 og kvotienten blir tilnærmet lik -1 (prøv å sette inn (relativt) høye verdier for x, f.eks $x = 20$, $x = 30$, etc.).

Vi kan også bevise dette ved bruk av regneregler for grenser; vi skriver først uttrykket noe om (under antagelsen at $x \neq 0$),

$$\frac{x^2}{2 - x^2} = \frac{x^2}{x^2(\frac{2}{x^2} - 1)} = \frac{1}{\frac{2}{x^2} - 1}$$



Figur 2: Grafen til $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (oppgave 31, side 128).

Dermed blir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x^2}-1}$$
$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

31.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

Løsning: Grafen er tegnet på figur (2). Det ser definitivt ut til at

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dette kan bekreftes ved å se på funksjonsverdiene i nærheten av $x = 0$. Merk at alle ledd som involverer x i funksjonen er av formen x^2, så grafen blir symmetrisk om y-aksen og vi kan begrense oss til $x > 0$. Se tabell (2).

Ved å skrive om uttrykket noe, og deretter benytte regnereglene for grenser, kan vi også vise at dette stemmer. Vi multipliserer med $1+\sqrt{1-x^2}$

x	f(x)
0.5	0.5358983848622456
0.2	0.50510257216822
0.1	0.5012562893380034
0.01	0.5000125006249245
0.001	0.5000001249699793
0.0001	.5000000080634948

Tabell 2: $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ for x nær 0. (oppgave 31, side 128).

over og under brøkstreken, og får at

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= \frac{1^2-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Dermed blir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

53. *Bruk regnereglene for grenser for å evaluere*

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{x+2} =: \lim_{x\to -2}\frac{p(x)}{q(x)}$$

Vi ser at $p(-2) = 2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-2 = 0$, så, siden $p(x)$ er et polynom, må nødvendigvis $(x+2)$ være en faktor i $p(x)$, m.a.o $p(x) = (x+2)r(x)$ for et 1.gradspolynom $r(x)$. Dette kan finnes ved polynomdivisjon:

$$\begin{aligned} &2x^2+3x-2 \,|\, x+2 = 2x-1 \\ -&(2x^2+4x) \\ &\;\;0 \;-\; x-2 \\ -&(\;0 \;-\; x-2) \\ &\qquad\quad 0 \end{aligned}$$

så $2x^2+3x-2 = (x+2)(2x-1)$. Dermed er

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x-2}{x+2} &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(2x-1)}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2}(2x-1) = -4-1 = -5\end{aligned}$$

2 Læreboka, s. 137-138

5. *Vis at*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{hvis } x \neq 2 \\ 3 & \text{hvis } x = 2 \end{cases}$$

er kontinuerlig i punktet $x = 2$.

Løsning: Dette er et spørsmål om å forsikre oss om at

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$

Siden 2 er et nullpunkt for 2.gradspolynomet $p_0(x) = x^2 - x - 2$, vet vi at $x - 2$ er en faktor i $p_0(x)$. Vi kan benytte polynomdivisjon for og finne at $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Dermed har vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x+1) = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

og det følger at f er kontinuerlig i punktet $x = 2$.

15. a). *Vis at*

$$f(x) = \sqrt{x - 1}, \qquad x \geq 1$$

er (høyre) kontinuerlig i $x = 1$.

Løsning: Funksjonen $k(x) = \sqrt{x}$ en potensfunksjon, som ifølge boksen på side 134 i læreboka er kontinuerlig *der den er definert*, nemlig på $\mathbb{R} \setminus [-\infty, 0)$, og vi vet også at $h(x) = x - 1$ er kontinuerlig (dette er et polynom). Det er lett å se at $f(x) = (k \circ h)(x)$. Siden $h(x)$ er kontinuerlig i $x = 1$ og $k(x)$ er kontinuerlig i $x = h(1) = 0$, så teoremet øverst på side 135 i læreboka kan benyttes for å konkludere at $k \circ h$ er kontinuerlig i $x = 1$.

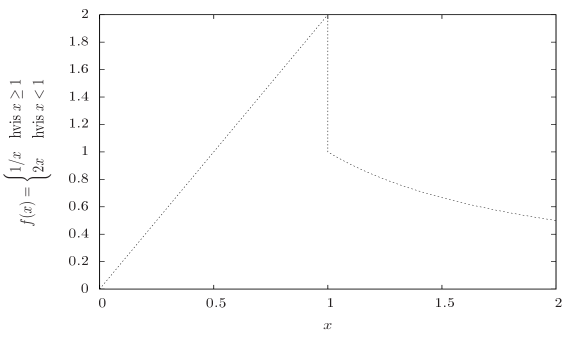
b). *Tegn grafen til $f(x)$.*

Løsning: Grafen er vist i fasiten til læreboka.

c). *Gir det mening å se på kontinuitet fra venstre side av $x = 1$?*

Løsning: Nei, det gjør det ikke. Grunnen til dette er at vi eksplisitt har begrenset oss til $x \in [1, \infty)$, så dette gir ingen mening. Et relatert, men forsåvidt irrelevant, spørsmål er om $\sqrt{x - 1}$ *gir mening* for $x < 1$, og vi kan naturligvis også diskutere kontinuitet for slike utvidelser. Svaret her er at $\sqrt{x-1}, \quad x < 1$ (med de egenskapene vi forventer av en kvadratrot) ikke gir mening som et reellt tall, men vi kan definere det som et komplekst tall (mer spesifikt, rent imaginært), se avsnitt 1.1.6 (dette er ikke pensum).

Situasjonen er nøyaktig den samme som om vi hadde spesifisert $g(x) = x^2$, $x \geq 0$. x^2 *er definert* for $x < 0$, men det gir i prinsippet like lite mening å snakke om kontinuitet for $g(x)$ fra venstre side av $x = 0$ i denne situasjonen (siden vi har begrenset definisjonsmengden).



Figur 3: Grafen til funksjonen f, definert i oppgave 28, side 137.

28. *La*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{for } x \geq 1 \\ 2x + c & \text{for } x < 1 \end{cases}$$

a). *Tegn grafen til $f(x)$ for $c = 0$, og avgjør om $f(x)$ er kontinuerlig for dette valget av c.*

Løsning: Se figur (3). Vi ser at $f(x)$ har en diskontinuitet i punktet $x = 1$ for denne spesifikke verdien av c.

b). *Hvordan må du velge c slik at $f(x)$ blir kontinuerlig for alle $x \in \mathbb{R}$?*

Løsning: Det eneste mulige problemet er der funksjonene er "limt sammen", nemlig i $x = 1$. Vi må velge c slik at

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Det er opplagt at $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$, mens $\lim_{x \to 1} 2x + c = 2 \cdot 1 + c = 2 + c$, så vi må ha $2 + c = 1$. Dermed er $c = -1$ den eneste muligheten som resulterer i at f blir kontinuerlig over hele $\mathbb{R}$.

3 Læreboka, side 142-143

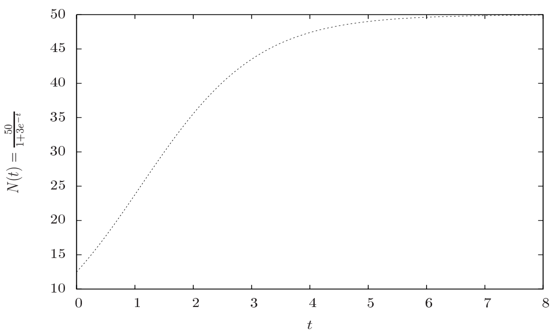
26. *Michaelis-Menten likningen beskriver initialhastighet for en enzymatisk reaksjon v_0 som funksjon av substratkonsentrasjon s_0. Ligningen er gitt ved*

$$v_0 = \frac{v_{\max} s_0}{s_0 + K_m}$$

Finn $\lim_{s_0 \to \infty} v_0$.

Løsning: Vi skriver om litt

$$v_0 = \frac{v_{\max} s_0}{s_0 + K_m} = \frac{s_0 v_{\max}}{s_0(1 + \frac{K_m}{s_0})} = \frac{v_{\max}}{1 + \frac{K_m}{s_0}}$$



Figur 4: Populasjonsstørrelse $N(t) = \frac{50}{1-3e^{-t}}$ som funksjon av tid t (oppgave 29a, side 143).

Dermed blir (siden $\lim_{s_0\to\infty} 1 + \frac{K_m}{s_0} \neq 0$):

$$\lim_{s_0\to\infty} v_0 = \frac{\lim_{s_0\to\infty} v_{\max}}{\lim_{s_0\to\infty} 1 + \frac{K_m}{s_0}} = \frac{v_{\max}}{1+0} = v_{\max}$$

29. (Logistisk vekst) *Anta at størrelsen N på en populasjon ved tid t er gitt ved*

$$N(t) = \frac{50}{1-3e^{-t}}, \qquad t \geq 0$$

(a) *Bruk en grafisk kalkulator for å skissére grafen til $N(t)$.*
Løsning: Grafen er vist på figur (4).

(b) *Bestem populasjonsstørrelsen når $t \to \infty$, ved å bruke regnereglene for grenser. Sammenlign svaret med grafen du skisserte i (a).*
Løsning:

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{\lim_{t\to\infty} 50}{\lim_{t\to\infty}(1+3e^{-t})} = \frac{50}{1+0} = 50$$

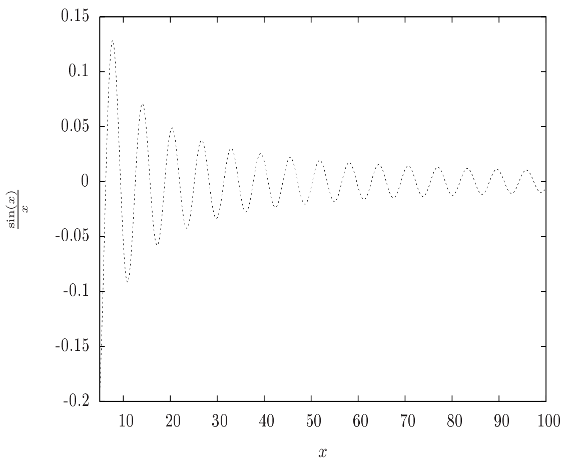
4 Læreboka, s. 148

4. *La*

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad x > 0$$

(a) *Bruk en grafisk kalkulator for tegne grafen til $y = f(x)$.*
Løsning: Se figur (5).

(b) *Forklar hvorfor du ikke kan bruke de fundamentale regnereglene for grenser til å beregne $\lim_{x\to\infty} f(x)$.*
Løsning: Her er det faktisk slik at verken $\sin(x)$ eller x har noen grense når $x \to \infty$, så bruk av regnereglene vil ikke fungere.



Figur 5: Grafen til $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ (oppgave 4, side 148).

(c) *Vis at*

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

og bruk "sandwich"-teoremet for å bestemme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}$$

Løsning: Vi vet at $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dermed er

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Siden $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$, har vi også (fra "sandwich teoremet")

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

11. *Bestem*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}}$$

Løsning: Anta $x \neq 0$. Vi multipliserer med πx over og under brøkstreken, som gir at

$$\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} = \frac{\pi x \sin(\pi x)}{\pi x \sqrt{x}} = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)\left(\frac{\pi x}{\sqrt{x}}\right)$$

a	$\frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(\frac{a+b}{2})$	$f(b)$
-1	-0.5	0	-4	1.125	2
-1	-0.75	-0.5	-4	-0.766	1.125
-0.75	-0.625	-0.5	-0.766	0.330	1.125
-0.75	-0.6875	-0.625	-0.766	-0.178	0.330
-0.6875	-0.65625	-0.625	-0.178	0.0857	0.330
-0.6875	0.671875	-0.65625	-0.178	-0.0437	0.0857
-0.671875	-0.6640625	-0.65625	-0.0437	0.0216	0.0857
-0.671875	-0.66796875	-0.6640625	-0.0437	-0.0109	0.0216
-0.66796875	-0.666015625	-0.6640625	-0.0109	0.00542	0.0216

Tabell 3: Halveringsmetoden for $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ (oppgave 9(a), side 153).

Dermed er

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)\left(\frac{\pi x}{\sqrt{x}}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\pi\sqrt{x}\right) = 1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

5 Læreboka, side 153

9. (a) *Bruk halveringsmetoden for å finne en løsning av*

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

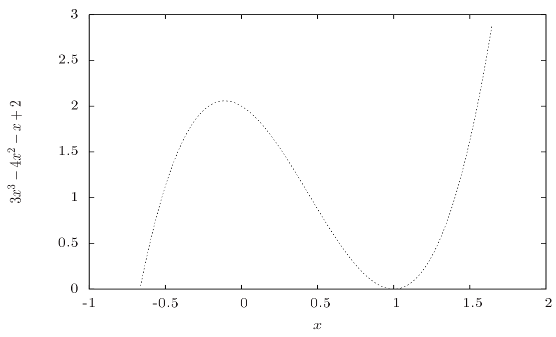
som er korrekt til 2 desimaler.

Løsning: Vi regner ut $f(0) = 2$ og $f(-1) = 3\cdot(-1)^3 - 4\cdot(-1)^2 - (-1) + 2 = -3 - 4 + 1 + 2 = -4$, så vi må ha en løsning på intervallet $(-1, 0)$. Vi har $f(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$, så løsningen må befinne seg i intervallet $(-1, -0.5)$, osv ... Resultatene er vist i tabell (3). Legg merke til at på siste linje stemmer de to første desimalene i a og b, og vi kan derfor være sikre på at løsningen, med to korrekte desimaler, er $x \approx -0.666 \pm 0.002$.

(b) *Tegn grafen til f*

Løsning: Se figur (6).

(c) De eksakte løsningene av denne ligningen er $x = -\frac{2}{3}$ og $x = 1$, og vi fant $x = -\frac{2}{3}$ (til 2 korrekte desimaler) over. Det å finne løsningen $x = 1$ på denne måten byr på problemer, da funksjonen, som vi ser ikke skifter fortegn over intervaller som inneholder denne løsningen, og mellomverditeoremet vil ikke kunne gi oss noe nyttig informasjon i det hele tatt.



Figur 6: Grafen til $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$ (oppgave 9b, side 153).

6 Læreboka, side 160-162

11. *Anta at størrelsen $N(t)$ av en populasjon ved tid t er*

$$N(t) = \frac{at}{k+t}, \qquad t \geq 0$$

der a og k er positive konstanter. Anta at

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 1.24 \times 10^6 =: L$$

og at ved $t = 5$ har populasjonen nådd størrelse $\frac{L}{2}$. Bruk dette til å bestemme konstantene a og k.

Løsning: Vi finner først et uttrykk for $\lim_{t\to\infty} N(t)$ som involverer a og k:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{at}{k+t} = \lim_{t\to\infty} \frac{at}{t(1+\frac{k}{t})} = \lim_{t\to\infty} \frac{a}{1+\frac{k}{t}} = a$$

Dermed er $a = L = 1.24 \times 10^6$. Vi vet også at $N(5) = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}L$, men

$$N(5) = \frac{a}{1+\frac{k}{5}} = \frac{a}{2}$$

så $1 + \frac{k}{5} = 2 \Rightarrow \frac{k}{5} = 1 \Rightarrow k = 5$.