Løsningsforslag Øving 4
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 152-153

12. *Forklar hvorfor et tredjegradspolynom har minst en rot* [1].

Løsning: Et tredjegradspolynom har generell form

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ er reelle konstanter med $a \neq 0$. Vi vet at p er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$, og dermed har vi fra mellomverditeoremet (side 149 i læreboka) at $p(x)$ har en rot dersom vi klarer å finne et intervall $[u, v]$ slik at $p(u) < 0 < p(v)$. Vi kan, uten tap av generalitet, anta at $a = 1$ (hvis ikke, betrakt polynomet $\frac{p(x)}{a}$; vi har $p(x_0) = 0$ hvis og bare hvis $\frac{p(x_0)}{a} = 0$). Vi bruker at $x^3 > 0$ for $x > 0$ og $x^3 < 0$ for $x < 0$. Dette ser ikke i utgangspunktet ut til å hjelpe oss nevneverdig, siden de resterende leddene $p_0(x) = p(x) - x^3 = bx^2 + cx + d$ godt kan skape problemer. Poenget er at for store nok x (i absoluttverdi) blir $p_0(x)$ nærmest ubetydelig i forhold til x^3.

Dette kan illustréres ved å se på et eksempel; la $q(x) = x^3 - 5x^2 + 10x + 40$ og velg f.eks $N = 1000$. Da blir

$$q(N) = q(1000) = (1000)^3 - 5(1000)^2 + 10(1000) + 40 = 995010040$$

Dette er, relativt sett, svært nært $(1000)^3 = 1000000000$; f.eks har vi at

$$\frac{|q(1000) - (1000)^3|}{(1000)^3} \approx 0.005$$

Tilsvarende blir

$$q(-N) = (-1000)^3 - 5(-1000)^2 + 10(-1000) + 40 = -1005009960$$

Resultatet er igjen at leddene $-5x^2 + 10x + 40$ bidrar svært lite i forhold til leddet x^3 (i dette tilfellet utgjør de cirka 5 tusendeler av totalsummen), og vi har nå bevist eksistensen av en rot for polynomet $q(x)$ (nærmere bestemt på intervallet $[-1000, 1000]$), uten eksplisitt å løse ligningen $q(x) = 0$.

[1] Et reellt tall $r \in \mathbb{R}$ sies å være en rot for et polynom p dersom $p(r) = 0$.

Det er også fullt mulig å utlede en formel, som for gitte konstanter $b, c, d \in \mathbb{R}$, gir oss $N > 0$ slik at $p(N) > 0$ og $p(-N) < 0$ for polynomet $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Vi må i utgangspunktet kreve at

$$N^3 > |bN^2 + cN + d|$$

Siden

$$\begin{aligned} |bN^2 + cN + d| &\leq |b|N^2 + |c|N + d \leq |b|N^2 + |c|N^2 + |d|N^2 \\ &= (|b| + |c| + |d|)N^2 \end{aligned}$$

holder dersom $N > 1$, vil også følgende fungere

$$N^3 > (|b| + |c| + |d|)N^2$$

eller, ved å dividere begge sider med N^2, $N > |b|+|c|+|d|$. Så, ved å velge (f.eks) $N = |b| + |c| + |d| + 1$, kan vi garantere at $p(N) > 0$ og $p(-N) < 0$.

2 Læreboka s. 177-179

13. a). *Bruk den formelle definisjonen av den deriverte til å finne den deriverte av $y = 5x^2$ i $x = -1$.*

Løsning: Per definisjon har vi

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

så

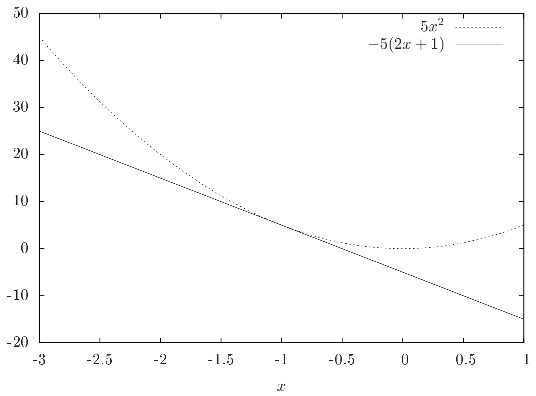
$$\begin{aligned} y'(-1) &= \lim_{h \to 0} \frac{y(-1+h) - y(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(-1+h)^2 - 5(-1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5((-1)^2 + 2(-1)h + h^2) - 5(-1)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{5(h^2 - 2h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h(h-2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 5(h-2) = -10 \end{aligned}$$

b). *Vis at punktet $(-1, 5)$ ligger på grafen til $y = 5x^2$ og finn ligningen for tangenten til $y = 5x^2$ i dette punktet.*

Løsning: Vi ser at $y(-1) = 5(-1)^2 = 5$, så $(-1, 5)$ ligger på grafen til $y = 5x^2$. Vi kjenner den deriverte til funksjonen i dette punktet, og dermed stigningstallet til tangenten. I tillegg vet vi at tangenten må passere gjennom punktet $(-1, 5)$.

En linje med stigningstall m har ligning $y = l(x) = mx + b$. Vi vet at $m = -10$ og at $l(-1) = m(-1) + b = 5$, så

$$\begin{aligned} 5 &= -10(-1) + b \\ b &= -5 \end{aligned}$$



Figur 1: Grafen til $y = f(x) = 5x^2$, sammen med tangentlinjen i punktet $(-1, 5)$ (oppgave 13c).

så tangentlinjen til $y = 5x^2$ i punktet $(-1, 5)$ er gitt ved

$$y = l(x) = -10x - 5 = -5(2x + 1)$$

c). *Tegn grafen til funksjonen* $y = 5x^2$ *og tangentlinjen i punktet* $(-1, 5)$ *i samme koordinatsystem.*
Løsning: Se figur (1).

21. *Finn ligningen for tangentlinjen til kurven* $y = \sqrt{x}$ *i punktet* $(4, 2)$.

    Løsning: Vi finner først stigningstallet, dvs den derverte til $y = \sqrt{x}$ i $x = 4$. Vi bruker definisjonen:

$$\begin{aligned} y'(4) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

    Merk at vi her gjør bruk av at $\sqrt{\cdot}$ er kontinuerlig (der den er definert), slik at $\lim_{h \to 0} \sqrt{4+h} = \sqrt{4} = 2$.

    Dette betyr at tangentlinjen har stigningstall $\frac{1}{4}$ og passerer gjennom $(4, 2)$, dvs at linjen er på formen $y = l(x) = \frac{x}{4} + b$ med

$$b = 2 - \frac{4}{4} = 1$$

    Altså er $y = l(x) = \frac{x}{4} + 1$ ligningen vi var ute etter.

25. *Finn ligningen for normallinjen til kurven* $y = 2x^2 - 1$ *i punktet* $(1, 1)$

Løsning: Vi finner først stigningstallet for tangentlinjen til kurven i dette punktet; utifra dette kan vi finne stigningstallet for normallinjen ved bruk av at produktet av disse to tallene skal være lik -1, og utifra dette bestemme ligningen.

Vi starter med å finne $y'(1)$, som per definisjon er gitt ved

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2 - 1 - (2(1)^2 - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2(1+2h+h^2) - 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0} 2(h+2) = 4 \end{aligned}$$

Dermed må stigningstallet for normallinjen være $-\frac{1}{4}$, dvs. linjen har formen $y = N(x) = -\frac{1}{4}x + b$. Siden $N(x)$ skal passere gjennom $(1, 1)$, har vi $1 = N(1) = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b$, så $b = \frac{5}{4}$ (medmindre jeg har gjort en feil, så er det feil i fasiten her).

27. *Følgende grense representerer den deriverte av en funksjon* f *i punktet* $(a, f(a))$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h}$$

Finn $f(x)$.

Løsning: Oppgaven er ikke veldig klar på dette punktet, men den mest opplagte tolkningen er at grensen over representerer den deriverte til en funksjon f for alle $a \in \mathbb{R}$, og vi bes om å finne f.

Grensen kan regnes ut på vanlig måte

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^2 - 2a^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h(2a+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2(2a+h) = 4a \end{aligned}$$

Dvs. at $f'(a) = 4a$ for alle $a \in \mathbb{R}$. Dermed er $f(x) = 2x^2$.

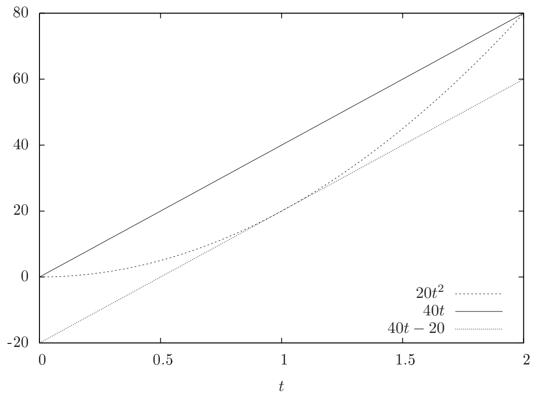
31. *En bil kjører langs en rett vei. Dens posisjon* s *ved tid* t *er gitt ved*

$$s(t) = 20t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$$

der t *er målt i timer og* $s(t)$ *er målt i kilometer.*

a). *Tegn grafen til* $s(t)$ *for* $0 \leq t \leq 2$

Løsning: Se figur (2).



Figur 2: Grafen til $s(t) = 20t^2$, tangenten i punktet $(1, 20)$ og sekanten gjennom $(0, 0)$ og $(2, 80)$ (illustrerer gjennomsnittshastigheten over $[0, 2]$) (oppgave 31)

b). *Finn gjennomsnittshastigheten til bilen over intervallet* $[0, 2]$. *Illustrer dette på grafen du tegnet over.*

Løsning: Ved $t = 0$ har bilen kjørt $20 \cdot 0^2 = 0$ kilometer, og ved $t = 2$ har den kjørt $20 \cdot (2)^2 = 80$ kilometer. Bilen har dermed tilbakelagt 80 km på 2 timer, og har derfor hatt en gjennomsnittshastighet på $\frac{80\text{km}}{2\text{timer}} = 40\frac{\text{km.}}{\text{time}}$. (Illustreres ved rett linje med stigningstall 40 fra $(0, 0)$ til $(2, 80)$ på grafen.)

c). *Bruk kalkulus for å finne den* instantane *hastigheten til bilen ved* $t = 1$. *Illustrer dette på grafen.*

Løsning: Den instantane hastigheten til bilen er gitt ved grensen av gjennomsnittshastigheten, tatt over mindre og mindre tidsintervaller, med andre ord den deriverte av $s(t)$ med hensyn på t.

Dette kan regnes ut

$$
\begin{aligned}
s'(1) &= \lim_{h \to 0} \frac{40(1+h)^2 - 40 \cdot 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{40(1^2 + 2h + h^2) - 40}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{40h(h+2)}{h} = \lim_{h \to 0} 40(h+2) = 80
\end{aligned}
$$

39. *Betrakt en kjemisk reaksjon*

$$A + B \longrightarrow AB$$

Dersom $x(t)$ *betegner konsentrasjon av* AB *ved tid* t, *da er*

$$\frac{\mathrm{d}\, x(t)}{\mathrm{d}\, t} = k(a - x)(b - x)$$

der $k > 0$ og a og b betegner konsentrasjoner av A og B ved tid 0. Anta $k = 3$, $a = 7$ og $b = 4$. For hvilke verdier av x er $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$? Hvordan vil du tolke dette?

Løsning: Av ligningen ser vi at $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ hvis og bare hvis $x = a = 7$ eller $x = b = 4$. Dette betyr at den instantane endringsraten i konsentrasjonen av AB er 0, dvs konsentrasjonen er konstant.

43. *Hvilke av følgende påstander er sanne?*

    (A) *Dersom $f(x)$ er kontinuerlig, da er $f(x)$ deriverbar.*

    (B) *Dersom $f(x)$ er deriverbar, da er $f(x)$ kontinuerlig.*

    Løsning: Bare påstand **(B)** er sann; Denne implikasjonen er teorem 1 side 175. På samme side er det også gitt et eksempel på at det motsatte ikke nødvendigvis alltid holder, dvs. en funksjon som er kontinuerlig i et punkt $x_¸$ men ikke deriverbar der. Faktisk finnes det funksjoner som er kontinuerlige overalt (der de er definert), men ikke deriverbare i et eneste punkt![2] (På toppen av det hele er dette en type oppførsel som de aller fleste, i en viss teknisk forstand, kontinuerlige funksjoner utviser, og ikke bare noe man ser i isolerte, patologiske eksempler).

45. *Skissér grafen til en funksjon som er kontinuerlig i alle punkter definisjonsmengden, og deriverbar i definisjonsmengden bortsett fra i ett punkt.*

    Løsning: En måte å gjøre dette på er å “lime sammen” grafene til to kontinuerlige og deriverbare funksjoner i et punkt der de har samme verdi, men forskjellig deriverte, noe som vil gi grafen et “knekkpunkt”. En mulighet er illustrert på figur (3), der vi har tegnet grafen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{hvis } x < 0.5 \\ -3x + 2.5 & \text{hvis } x >= 0.5 \end{cases}$$

3 Læreboka s. 183-186

5. *Deriver funksjonen $f(x) = 3 - 4x - 5x^2$ med hensyn på den uavhengige variablen x.*

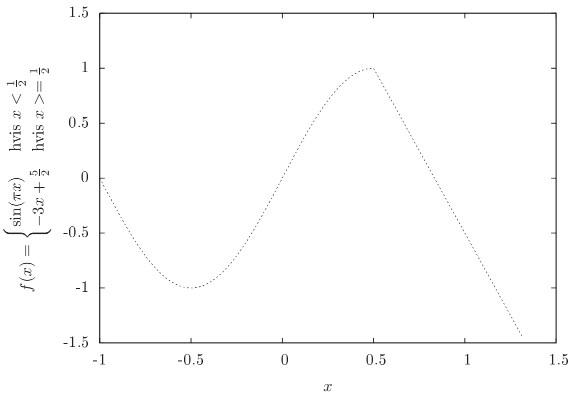
    Løsning:

$$f'(x) = (3 - 4x - 5x^2)' = 0 - 4 - 5 \cdot 2x^{2-1} = -4 - 10x$$

    Her har vi brukt linearitet og regler for derivasjon av potenser.

11. *Deriver funksjonen $f(x) = x^2 \sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}$ med hensyn på den uavhengige variablen x.*

[2] se f.eks http://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function for et eksempel.



Figur 3: Kontinuerlig funksjon som er deriverbar overalt, bortsett fra i $x = \frac{1}{2}$ (oppgave 45).

Løsning:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{\pi}{3} + 0 = 2x \sin\frac{\pi}{3}$$

(dette fordi $\sin\frac{\pi}{3}$ og $\tan\frac{\pi}{4}$ er konstanter (uavhengige av x).)

39. *Deriver*

$$g(N) = rN^2\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

med hensyn på N under antagelsen at K og r er konstanter (positive også opplyser læreboka, men det er fullstendig irrelevant).

Løsning: Vi skriver uttrykket litt om

$$g(N) = rN^2 - \frac{r}{K}N^3$$

og den deriverte med hensyn på N blir dermed

$$g'(N) = 2rN - \frac{r}{K}3N^2$$

73. *Finn et punkt på kurven*

$$y = 4 - x^2$$

som har tangentlinje parallell med linjen $y = x$. Er det flere enn ett slikt punkt? I så tilfelle, finn alle punktene med denne egenskapen.

Løsning: Siden linjen $y = x$ har stigningstall 1, så er vi med andre ord ute etter å finne x slik at $y'(x) = 1$. Vi finner først et uttrykk for den deriverte

$$y'(x) = -2x$$

så vi må altså ha at $y'(x) = 1 = -2x$, eller $x = -\frac{1}{2}$. Dette er opplagt den eneste løsningen ($y'(x) - 1$ er et førstegradspolynom i x, og har dermed kun en rot (dette er en rett linje)).