Løsningsforslag Øving 5
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 192-194

3. *Derivér funksjonen*

$$f(x) = (x^3 + 17)(3x - 14x^2)$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Produktregelen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x - 14x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(x^3 + 17) + (x^3 + 17)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(3x - 14x^2) \\ &= (3x^2)(3x - 14x^2) + (x^3 + 17)(3 - 28x) \end{aligned}$$

7. *Derivér funksjonen*

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{5}$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Produktregelen gir

$$f'(x) = \frac{1}{5}\big(1 \cdot (x+1) + 1 \cdot (x-1)\big) = \frac{2x}{5}$$

27. *Bruk produktregelen for derivasjon (gjentatte ganger, om nødvendig) for å finne den deriverte av $y = f(x)$, der*

$$f(x) = (x-3)(2x^2+1)(1-x^2).$$

Løsning: Vi skriver $f(x) = u(x)v(x)$ med (f.eks) $u(x) = x - 3$ og $v(x) = (2x^2+1)(1-x^2)$. Fra produktregelen har vi dermed at $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Funksjonen $v(x)$ er skrevet som et produkt, og vi kan dermed bruke produktregelen for å finne $v'(x)$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big((2x^2+1)(1-x^2)\Big) \\ &= (2x^2+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(1-x^2) + (1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(2x^2+1) \\ &= -2x(2x^2+1) + 4x(1-x^2) \end{aligned}$$

Vi setter resultatet inn i uttrykket for $f'(x)$ over

$$\begin{aligned}
f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = v(x)(x-3)' + (x-3)v'(x) \\
&= (2x^2+1)(1-x^2)\cdot 1 + (x-3)\big(-2x(2x^2+1) + 4x(1-x^2)\big) \\
&= (1-x^2)\big(2x^2+1) + 4x(x-3)\big) - 2x(x-3)(2x^2+1) \\
&= (6x^2-12x+1)(1-x^2) - 2x(x-3)(2x^2+1)
\end{aligned}$$

55. *Derivér funksjonen*

$$h(t) = \frac{t^2-3t+1}{t+1}$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Sett $u(t) = t^2 - 3t + 1)$ og $v(t) = t + 1$. Da er $h(t) = \frac{u(t)}{v(t)}$, og kvotientregelen for derivasjon gir at

$$\begin{aligned}
h'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{(2t-3)(t+1) - (t^2-3t+1)\cdot 1}{(t+1)^2} \\
&= \frac{2t^2 - 3t + 2t - 3 - t^2 + 3t - 1}{(t+1)^2} \\
&= \frac{t^2+2t-4}{(t+1)^2}
\end{aligned}$$

67. *Derivér funksjonen*

$$g(s) = \frac{s^{1/3}-1}{s^{2/3}-1}$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Kvotientregelen gir

$$\begin{aligned}
g'(s) &= \frac{(s^{2/3}-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(s^{1/3}-1) - (s^{1/3}-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}(s^{2/3}-1)}{(s^{2/3}-1)^2} \\
&= \frac{(s^{2/3}-1)\frac{1}{3}s^{\frac{1}{3}-1} - (s^{1/3}-1)\frac{2}{3}s^{\frac{2}{3}-1}}{(s^{2/3}-1)^2} \\
&= \frac{1}{3(s^{2/3}-1)^2}\left(s^{-2/3}(s^{2/3}-1) - 2s^{-1/3}(s^{1/3}-1)\right) \\
&= \frac{1 - s^{-2/3} - 2 + 2s^{-1/3}}{3(s^{2/3}-1)^2} \\
&= \frac{2s^{-1/3} - s^{-2/3} - 1}{3(s^{2/3}-1)^2}
\end{aligned}$$

75. *Derivér*

$$f(x) = \frac{ax}{3+x}$$

med hensyn på x. Anta at a er en positiv konstant.

Løsning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(ax)'(3+x) - (3+x)'(ax)}{(3+x)^2} \\ &= \frac{a(3+x) - ax}{(3+x)^2} = \frac{3a}{(3+x)^2} \end{aligned}$$

83. *Anta at $f(2) = -4$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$, og $g'(2) = -2$. Finn*

$$\left(\frac{f}{2g}\right)'(2).$$

Løsning: Kvotientregelen gir

$$\left(\frac{f}{2g}\right)'(2) = \frac{f'(2)(2g)(2) - (2g)'(2)f(2)}{(2g)^2(2)} = \frac{2f'(2)g(2) - 2g'(2)f(2)}{4g(2)^2}$$

Vi setter inn de oppgitte verdiene for $f(2), g(2), f'(2)$ og $g'(2)$ i uttrykket på høyre side. Dette gir

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{2g}\right)'(2) &= \frac{2f'(2)g(2) - 2g'(2)f(2)}{4g(2)^2} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)(-4)}{4(3)^2} \\ &= \frac{6-16}{36} = \frac{-10}{36} = \frac{-5}{18} \end{aligned}$$

2 Læreboka s. 208-211

3. *Derivér funksjonen*

$$f(x) = (1-3x^2)^4$$

med hensyn på den uavhengive variabelen.

Løsning: Vi skriver $f(x) = u(x)^4$, med $u(x) = 1 - 3x^2$, og bruker kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\left(u^4\right) \cdot u'(x) = 4u^3 \cdot (-6x^2) \\ &= -6x^2 \cdot 4(1-3x^2)^3 = -24x^2(1-3x^2)^3 \end{aligned}$$

7. *Derivér funksjonen*

$$f(x) = \sqrt{3 - x^3}$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Skriv $u(x) = 3 - x^3$, da er $f(x) = \sqrt{u} = u^{1/2}$, så fra kjerneregelen har vi at

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot -3x^2 = \frac{-3x^2}{2\sqrt{3 - x^3}}$$

15. *Derivér funksjonen*

$$f(s) = \sqrt{s + \sqrt{s}}$$

med hensyn på den uavhengige variabelen.

Løsning: Skriv $u(s) = s + \sqrt{s}$ og bruk kjerneregelen:

$$f'(s) = \frac{1}{2\sqrt{s + \sqrt{s}}} \cdot u'(s) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{s}}}{2\sqrt{s + \sqrt{s}}}$$

35. *Anta* $f'(x) = \frac{1}{x}$.

(a). *Finn*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x^2 + 3).$$

Løsning: Vi skriver $u(x) = x^2 + 3$ og bruker kjerneregelen sammen med det oppgitte uttrykket for $f'(x)$. Det gir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x^2 + 3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u} f(u) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} u(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 3}$$

59. (a). *Betrakt kurven gitt ved ligningen* $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$. *Finn* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *i punktet* $(-1, 3\sqrt{3})$.

Løsning: Vi deriverer med hensyn på x, under den antagelse at y er en deriverbar funksjon av x:

$$\frac{2}{3}\left(x^{2/3-1} + y^{2/3-1}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right) = \frac{2}{3}\left(x^{-1/3} + y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right) = 0$$

Dermed er

$$\begin{aligned} y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} &= -(x)^{-1/3} \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} &= -(x^{1/3})y^{1/3} \end{aligned}$$

Innsetting av $x = -1$ og $y = 3\sqrt{3}$ gir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}(-1, 3\sqrt{3}) &= -(-1)^{1/3} \cdot (3\sqrt{3})^{1/3} = (3\sqrt{3})^{1/3} \\
&= (\sqrt{3^2 \cdot 3})^{1/3} = \sqrt{27}^{1/3} = (27)^{1/2 \cdot 1/3} \\
&= (27)^{1/6}
\end{aligned}
$$