Løsningsforslag Øving 6
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 208-211

79. *Finn den andrederiverte av funksjonen*

$$f(s) = \sqrt{s^{3/2} - 1}.$$

Løsning: Vi finner først $f'(s)$. Skriv $f(s) = \sqrt{h(s)}$ med $h(s) = s^{3/2} - 1$. Da er $h'(s) = \frac{3}{2}s^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{s}$, så kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{1}{2\sqrt{h(s)}} \cdot h'(s) = \frac{3\sqrt{s}}{4\sqrt{s^{3/2} - 1}} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{s}{s^{3/2} - 1}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{s^{1/2} - \frac{1}{s}}} \\ &= \frac{3}{4}\left(s^{1/2} - \frac{1}{s}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

For å finne $f''(s)$, kan vi nok en gang bruke kjerneregelen, denne gang med $f'(s) = \frac{3}{4}(u(s))^{-1/2}$, og "kjerne" $u(s) = s^{1/2} - \frac{1}{s}$. Dette gir

$$u'(s) = \frac{1}{2}s^{-1/2} - (-1) \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{s^2}$$

og dermed er

$$f''(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\,(u(s))^{-3/2} \cdot u'(s) = \frac{-3\left(\frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{s^2}\right)}{8\left(s^{1/2} - \frac{1}{s}\right)^{3/2}}$$

86. *Posisjonen ved tidspunkt t til en partikkel, som beveger seg langs en rett linje, er gitt ved en funksjon $s(t)$. Den deriverte av s (med hensyn på t) kalles* hastigheten, *og betegnes $v(t)$; det vil si, hastigheten er endringsraten (over tid) for posisjonen. Endringsraten (over tid) for hastigheten kalles* akselerasjon, *og betegnes med $a(t)$, dvs.*

$$\frac{\mathrm{d}\, v(t)}{\mathrm{d}\, t} = a(t)$$

Gitt at $v(t) = s'(t)$, følger det at

$$\frac{\mathrm{d}^2\, s(t)}{\mathrm{d}\, t^2} = a(t)$$

(a). *Finn hastighet og akselerasjon ved tid $t = 1$, dersom posisjonen $s(t)$ er gitt ved*

$$s(t) = t^2 - 3t.$$

Løsning: Enkel derivasjon gir

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 2t - 3 \\ a(t) &= v'(t) = s''(t) = 2 \end{aligned}$$

så hastigheten ved tid $t = 1$ er $v(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ og akselerasjonen er som vi ser konstant lik 2 for alle t, dermed også lik 2 ved tid $t = 1$.

2 Læreboka s. 215-216

1. *Finn den deriverte av følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen*

$$f(x) = 2\sin(x) - \cos(x)$$

Løsning: Enkel bruk av teoremet på side 211 i læreboka:

$$f'(x) = 2\cos(x) - (-\sin(x)) = 2\cos(x) + \sin(x)$$

49. *Finn den deriverte av følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen*

$$h(x) = \frac{3}{\tan(2x) - x}$$

Løsning: Vi bruker kjerneregelen på $h(x) = \frac{3}{g(x)}$, der "kjernen" $g(x)$ er gitt ved $g(x) = \tan(2x) - x$:

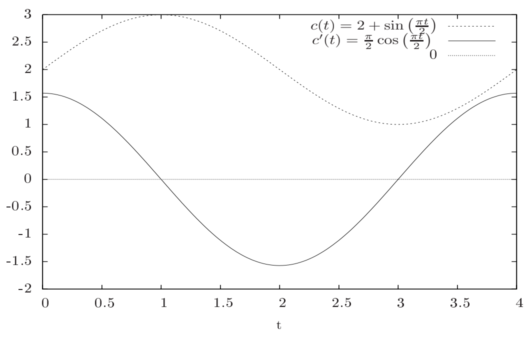
$$h'(x) = 3 \cdot \frac{-1}{(\tan(2x) - x)^2} \cdot (2\sec^2(2x) - 1) = \frac{-3(2\sec^2(2x) - 1)}{(\tan(2x) - x)^2}$$

73. *Anta at konsentrasjonen av nitrogen i en innsjø viser periodisk oppførsel over tid. Dersom vi lar $c(t)$ betegne konsentrasjonen av nitrogen i innsjøen ved tid t, antar vi at*

$$c(t) = 2 + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

(a). *Finn*

$$\frac{\mathrm{d}\, c(t)}{\mathrm{d}\, t}$$



Figur 1: Funksjonene $c(t)$ og $c'(t)$ (oppgave 73b).

Løsning: Dette er forholdsvis enkel bruk av kjerneregelen og derivasjonsregeler for trigonometriske funksjoner:

$$c'(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

(b). *Bruk en graftegner for å tegne grafen til både $c(t)$ og $\frac{\mathrm{d}\, c(t)}{\mathrm{d}\, t}$ i samme koordinatsystem.*

Løsning: Se figur (1).

(c). *Ved å betrakte grafene du tegnet i (b). over, besvar følgende spørsmål:*

(i) *Når $c(t)$ når et maksimum, hva er da verdien av $\frac{\mathrm{d}\, c(t)}{\mathrm{d}\, t}$?*
Løsning: Verdien til $c'(t)$ er 0 når c har et maksimum.

(ii) *Når $\frac{\mathrm{d}\, c(t)}{\mathrm{d}\, t}$ er positiv, er $c(t)$ økende eller minkende?*
Løsning: Økende.

(iii) *Hva kan du si om $c(t)$ når $\frac{\mathrm{d}\, c(t)}{\mathrm{d}\, t} = 0$?*
Løsning: Utifra grafen ser vi at $c(t)$ har enten et maksimum eller minimum i disse punktene.
Merk: generelt er ting litt mer komplisert; en to ganger deriverbar funksjon $f(x)$ som er slik at $f'(x_0) = 0$ vil ha enten et lokalt *maksimum eller minimum i x_0 under den forutsetning at $f''(x) \neq 0$. Se avsnitt 5.3 i læreboka.*

3 Læreboka s. 221-223

3. *Derivér følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen*

$$f(x) = 4e^{1-3x}$$

Løsning:

$$f'(x) = 4e^{1-3x} \cdot -3 = -12e^{1-3x}$$

35. *Derivér følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen*

$$f(x) = 2^{x+1}$$

Løsning: Bruker at $2^u = e^{u \ln 2}$, så $f(x) = e^{(x+1)\ln 2}$, og

$$f'(x) = \ln 2 e^{(x+1)\ln 2} = 2^{x+1} \ln(2)$$

47. *Derivér følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen*

$$h(t) = 5^{\sqrt{t}}$$

Løsning: Vi bruker kjerneregelen med $h(t) = 5^{u(t)}$ og $u(t) = \sqrt{t}$. Da er $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ og dermed har vi

$$h'(t) = u'(t) \cdot 5^{u(t)} \ln 5 = \frac{5^{\sqrt{t}} \ln 5}{2\sqrt{t}}$$

61. *Anta at en bakteriekoloni vokser på en slik måte at ved tid t, så er populasjonsstørrelsen $N(t)$ gitt ved*

$$N(t) = N(0)2^t$$

der $N(0)$ er populasjonsstørrelsen ved tid 0. Finn vekstraten; det vil si, finn $\frac{\mathrm{d}\, N(t)}{\mathrm{d}\, t}$ og uttrykk dette ved $N(t)$. Vis at vekstraten til populasjonen er proporsjonal med populasjonsstørrelsen.

Løsning:

$$N'(t) = N(0)2^t \ln 2 = N(t) \ln 2$$

så $N'(t) \propto N(t)$ med proporsjonalitetskonstant $\ln 2$.

4 Læreboka s. 233-234

11. *La*

$$f(x) = x + e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Finn $\frac{\mathrm{d}\, f^{-1}(x)}{\mathrm{d}\, x}(1)$ (Merk at $f(0) = 1$).

Vi vet at (side 223-224 i læreboka)

$$\frac{\mathrm{d}\, f^{-1}}{\mathrm{d}\, x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Løsning: Det er opplagt at $f'(x) = 1 + e^x$. Vi er ute etter den deriverte av den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$ i punktet $x = 1$. Formelen sier at vi skal ta 1 delt på den deriverte av f, tatt i punktet $f^{-1}(1)$, som er oppgitt til å være 0 ($f(0) = 1$ impliserer $0 = f^{-1}(1)$), så vi har

$$\frac{\mathrm{d}\, f^{-1}(x)}{\mathrm{d}\, x}(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

39. *Derivér følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen:*

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+2x}$$

Løsning: Vi skriver $f(x) = \ln g(x)$ med $g(x) = \frac{1-x}{1+2x}$, og bruker kjerneregelen. Vi finner først den deriverte av "kjernen" $g(x)$ ved hjelp av kvotientregelen:

$$g'(x) = \frac{-1 \cdot (1+2x) - 2 \cdot (1-x)}{(1+2x)^2} = \frac{-3}{(1+2x)^2}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1+2x}{1-x} \cdot \frac{-3}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{-3}{(1-x)(1+2x)} \end{aligned}$$

I fasiten er dette satt noe opp annerledes, nemlig $f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{1+2x}$. Det er relativt enkelt å omforme fasitsvaret til det vi fant over, simpelthen ved å multiplisere begge leddene med felles nevner $(1-x)(1+2x)$ over og under brøkstreken:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{1-x} - \frac{2}{1+2x} &= \frac{-1(1+2x) - 2(1-x)}{(1-x)(1+2x)} \\ &= \frac{-1-2x-2+2x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{-3}{(1-x)(1+2x)} \end{aligned}$$

49. *Derivér følgende funksjon med hensyn på den uavhengige variabelen:*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Løsning: Forholdsvis enkel bruk av kvotientregelen:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

67. *Bruk logaritmisk derivasjon for å finne den deriverte av følgende funksjon:*

$$f(x) = x^{\ln(x)}$$

Løsning: Vi tar logaritmen på begge sider

$$\ln(f(x)) = \ln x^{\ln x} = \ln(x) \cdot \ln(x) = (\ln(x))^2$$

og deriverer med hensyn på x:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} f'(x) &= 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \\ f'(x) &= f(x) \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln(x) x^{\ln(x)} \end{aligned}$$

75. *Derivér (med hensyn på x)*

$$y = \frac{e^{2x}(9x-2)^3}{\sqrt[4]{(x^2+1)(3x^3-7)}}$$

Løsning: Vi tar logaritmen på høyre og venstre side

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln e^{2x}(9x-2)^3 - \ln \sqrt[4]{(x^2+1)(3x^3-7)} \\
&= \ln e^{2x} + 3\ln(9x-2) - \frac{1}{4}\Big(\ln(x^2+1) + \ln(3x^3-7) \Big) \\
&= 2x + 3\ln(9x-2) - \frac{1}{4}\Big(\ln(x^2+1) + \ln(3x^3-7) \Big)
\end{aligned}$$

og deriverer med hensyn på x

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}y'(x) &= 2 + \frac{3\cdot 9}{9x-2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right) \\
y'(x) &= y\left(2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right)\right) \\
&= \frac{e^{2x}(9x-2)^3}{\sqrt[4]{(x^2+1)(3x^3-7)}}\left(2 + \frac{27}{9x-2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{9x^2}{3x^3-7}\right)\right)
\end{aligned}$$