

Løsningsforslag, Øving 7

MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka, side 241-242

I oppgave 3 og 9, bruk formelen

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

til å approksimere verdien av den oppgitte funksjonen. Regn også ut funksjonsverdien med kalkulator og sammenlign svarene.

3. $\sqrt[3]{124}$.

Løsning: Vi vet at $5^3 = 125$, så $\sqrt[3]{125} = 5$, og vi kan derfor forvente at $\sqrt[3]{124}$ er litt under 5. Sett $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Da er $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, og fra (1) har vi, med $a = 125$, $x = 124$ at

$$\begin{aligned} f(124) &= \sqrt[3]{124} \approx f(125) + f'(125)(124 - 125) \\ &= \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3(125)^{2/3}} \cdot (-1) \\ &= 5 - \frac{1}{3 \cdot (125^{1/3})^2} = 5 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} = 5 - \frac{1}{75} \approx 4.98666666 \dots \end{aligned}$$

Bruk av kalkulator gir $\sqrt[3]{124} = 4.986630952 \dots$

9. $\ln(1.01)$.

Løsning: Vi har $\ln(1) = 0$ (siden $e^0 = 1$), dermed kan vi forvente et svar i nærheten av 0 et sted (funksjonen $x \mapsto \ln(x)$ vokser rimelig sakte når $x > 1$). Vi bruker dermed $x = 1.01$, $a = 1$ og $x - a = 0.01$ i approksimasjonen (1) over (med $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$):

$$\begin{aligned} f(1.01) &= \ln(1.01) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= \ln(1) + \frac{1}{1}(1.01 - 1) = 0 + 0.01 = 0.01 \end{aligned}$$

Kalkulatorsvaret i dette tilfellet er $\ln(1.01) = 0.009950331 \dots$, så igjen ser vi at vi får relativt god nøyaktighet.

31. Anta at per capita vekstrate (vekstrate per person) for en populasjon er 3 %, det vil si, dersom $N(t)$ betegner populasjonsstørrelsen ved tid t , da er

$$\frac{1}{N} \frac{dN(t)}{dt} = 0.03 \quad (2)$$

Anta at populasjonsstørrelsen ved tid $t = 4$ er 100. Bruk en lineær approksimasjon for å beregne (omtrentlig) populasjonsstørrelse ved tid $t = 4.1$.

Løsning: Vi bruker (1) over (med $f(x) = N(t)$ naturligvis). Fra (2) ser vi at $N'(t) = 0.03N(t)$, slik at vi har alle størrelsene vi trenger tilgjengelige. Populasjonstørrelsen ved $t = 4$ er kjent, så vi bruker $a = 4$, $x = 4.1$ og setter inn

$$\begin{aligned} N(4.1) &\approx N(4) + N'(4)(4.1 - 4) = 100 + 0.03 \cdot N(4) \cdot (0.1) \\ &= 100 + 0.03 \cdot 100 \cdot 0.1 = 100 + 0.03 \cdot 10 = 100.3 \end{aligned}$$

45. Volumet V av et kuleskall med radius $r > 0$ er gitt ved

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Dersom du kan bestemme radius innenfor en nøyaktighet på 3 %, hvor nøyaktig blir da din beregning av volumet?

Løsning: Den oppgitte nøyaktigheten er den relative nøyaktigheten, så vi har $|(\Delta r)/r_0| = 0.03$ der r_0 er den virkelige radiusen, og $\Delta r = |r - r_0|$. Vi approksimerer den resulterende usikkerheten i V ved

$$\Delta V \approx V'(r_0)\Delta r = \frac{12\pi r_0^2}{3}\Delta r = 4\pi r_0^2\Delta r$$

Dermed blir (omtrentelig) relativ feil i beregning av volumet

$$\left| \frac{\Delta V}{V(r_0)} \right| \approx \left| \frac{4\pi r_0^2\Delta r}{\frac{4\pi r_0^3}{3}} \right| = \left| \frac{3\Delta r}{r_0} \right| = 3 \cdot 0.03 = 0.09$$

så vi får en relativ feil på 0.09, eller 9 %.

2 Læreboka, side 243-244

19. Finn dy/dx og d^2y/dx^2 , der y er gitt ved

$$e^y = \ln x$$

Løsning: Det er flere måter å gå frem på her; vi kan f.eks ta (naturlig) logaritme av begge sider, som gir $y = \ln[\ln(x)]$, og derivere direkte ved bruk av kjerneregelen

$$y'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(x)}$$

og

$$\begin{aligned}y''(x) &= \frac{d}{dx}[x \ln(x)]^{-1} = -1[x \ln(x)]^{-2} \cdot \left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) \\&= \frac{-(\ln x + 1)}{(x \ln(x))^2}\end{aligned}$$

Ligningen kan selvsagt også deriveres implisitt:

$$\begin{aligned}e^y y' &= \frac{1}{x} \\y' &= \frac{e^{-y}}{x} = \frac{1}{e^y x} = \frac{1}{x \ln(x)}\end{aligned}$$

og ved å derivere ligningen $e^y y' = \frac{1}{x}$ får vi (bruker produktregelen på høyre side):

$$\begin{aligned}(e^y (y')^2 + e^y y'') &= \frac{-1}{x^2} \\e^y y'' &= \frac{-1}{x^2} - e^y (y')^2 \\y'' &= e^{-y} \left(\frac{-1}{x^2} - e^y (y')^2 \right) \\y'' &= \frac{-1}{x^2 \ln(x)} - (y')^2 = \frac{-1}{x^2 \ln(x)} - \frac{1}{(x \ln x)^2} \\&= \frac{-(\ln(x) + 1)}{(x \ln(x))^2}\end{aligned}$$

21. *En flokk fugler, som flyr horisontalt i en høyde av 100 fot, og med en hastighet på 6 fot per sekund, passerer rett over deg. Hvor hurtig øker avstanden mellom deg og fuglene når avstanden er 320 fot? (Du befinner deg på bakken og står stille.)*

Løsning: Avstanden mellom fuglene og deg er bestemt ved lengden på hypotenusen i en rettvinklet trekant hvor de tre hjørnene er bestemt av din posisjon A , posisjonen til fuglene da de befant seg rett over deg B og fuglenes nåværende posisjon C . Lengden av kateten AB er $a = 100$ ft., og avstanden $b = b(t) = |BC|$ avhenger av antall sekunder som har passert. Fra Pytagoras teorem har vi da at avstanden $c(t)$ mellom deg og fuglene ved tid t (dette er lik lengden av hypotenusen AC) er gitt ved $c(t) = \sqrt{a^2 + b(t)^2} = \sqrt{100^2 + (6 \cdot t)^2} = \sqrt{100^2 + 36t^2}$ fot.

For å finne hvor hurtig avstanden øker ved tid t , deriverer vi $c(t)$ med hensyn på t :

$$c'(t) = \frac{1}{2\sqrt{100^2 + 36t^2}} \cdot 2 \cdot 36t = \frac{36t}{\sqrt{100^2 + 36t^2}} = \frac{36t}{c(t)}$$

Vi trenger også å vite ved hvilket tidspunkt t_0 , avstanden mellom deg og fuglene er 320 fot; dvs, vi må løse for t_0 i følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} c(t_0) &= 320 = \sqrt{100^2 + 36t_0^2} \\ 320^2 &= 100^2 + 36t_0^2 \\ t_0^2 &= \frac{320^2 - 100^2}{36} \\ t_0 &= \frac{\sqrt{320^2 - 100^2}}{6} \quad (\approx 50.7) \end{aligned}$$

På dette tidspunktet øker avstanden med

$$\begin{aligned} c'(t_0) &= \frac{36t_0}{c(t_0)} = \frac{36}{320} \cdot \frac{\sqrt{320^2 - 100^2}}{6} \\ &= 6 \sqrt{\frac{320^2 - 100^2}{320^2}} = 6 \sqrt{1 - \left(\frac{10}{32}\right)^2} \approx 5.70 \frac{\text{ft.}}{\text{s}} \end{aligned}$$

37. I eksempel 17, avsnitt 4.4.3, introduserte vi en allometrisk relasjon mellom lengden på hodeskallen (i cm.) og lengden på ryggraden (i cm.) for Ichtyosaurer, en gruppe utdødde marine reptiler. Denne relasjonen er

$$S = (1.162)B^{0.933}$$

der S og B betegner henholdsvis hodeskallens og ryggradens lengde. Anta at du har funnet kun hodeskallen fra et individ, og at du basert på hodeskallens lengde ønsker å estimere ryggradens lengde for dette individet. Hvor nøyaktig må du måle hodeskallens lengde for å kunne estimere lengden på ryggraden til en nøyaktighet på 10 %?

Løsning: Vi skriver først om relasjonen litt, for å få et uttrykk for B som funksjon av S :

$$\begin{aligned} S &= 1.162B^{0.933} \\ \frac{S}{1.162} &= B^{0.933} \\ \left(\frac{S}{1.162}\right)^{1/0.933} &= (B^{0.933})^{1/0.933} = B \end{aligned}$$

For å finne $B'(S)$ er det egentlig enklest å simpelthen derivere uttrykket for S implisitt (med hensyn på S)

$$\begin{aligned} 1 &= 1.162 \cdot 0.933 B^{0.933-1} \cdot B'(S) \\ B'(S) &= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} B^{-0.933+1} \end{aligned}$$

Ved hjelp av dette kan vi nå approksimere $\left| \frac{\Delta B}{B(S_0)} \right|$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta B}{B(S_0)} \right| &\approx \left| \frac{B'(S_0)\Delta S}{B(S_0)} \right| \\
&= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} |B(S_0)^{-0.933+1} \cdot \Delta S \cdot B(S_0)^{-1}| \\
&= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} |B(S_0)^{-0.933+1-1} \cdot \Delta S| \\
&= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} |B(S_0)^{-0.933} \cdot \Delta S| \\
&= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} \left| \left(\frac{S_0}{1.162} \right)^{\frac{1}{0.933} \cdot (-0.933)} \Delta S \right| \\
&= (1.162 \cdot 0.933)^{-1} \left| \frac{1.162 \Delta S}{S_0} \right| \\
&= \frac{1}{0.933} \cdot \left| \frac{\Delta S}{S_0} \right|
\end{aligned}$$

Det er nettopp denne vi ønsker å ha innenfor 10%, dvs

$$\begin{aligned}
0.10 &= \frac{1}{0.933} \cdot \left| \frac{\Delta S}{S_0} \right| \\
0.0933 &= \frac{\Delta S}{S_0}
\end{aligned}$$

så dette betyr at lengden på hodeskallen må kunne måles med en nøyaktighet innenfor ca. 9.33 %.

3 Læreboka, side 296-298

1. Finn den minste mulige omkretsen for et rektangel som har areal 25 cm^2 .¹

Løsning: La $A = 25 \text{ cm}^2$. La s_1 og s_2 være sidelengdene på rektangelet. Vi har at $A = 25 \text{ cm}^2 = s_1 s_2$, og det følger at den ene sidelengden er bestemt av den andre, f.eks $s_2 = \frac{A}{s_1}$. Omkretsen til et slikt rektangel er gitt ved

$$O = 2s_1 + 2s_2 = 2(s_1 + s_2) = 2 \left(s_1 + \frac{A}{s_1} \right)$$

uttrykt som en funksjon av den ene sidelengden s_1 .

Problemet er altså ekvivalent med å finne et globalt minimum for funksjonen O . Derivasjon med hensyn på s_1 gir

$$O'(s_1) = 2 \left(1 - \frac{A}{s_1^2} \right)$$

¹Boka bruker kvadrattommer = "square inches" = in², men cm² er mer naturlig på norsk. De resulterende måltallene blir de samme, selv om enhetene er forskjellig (1 tomme = 2.54 cm)

Siden $O'(s_1) = 0$ hvis og bare hvis

$$\begin{aligned}0 &= 2 \left(1 - \frac{A}{s_1^2} \right) \\ \frac{A}{s_1^2} &= 1 \\ A &= s_1^2 \\ s_1 &= \sqrt{A} (= \sqrt{25} = 5)\end{aligned}$$

For å finne ut av om dette er et ekstrempunkt, ser vi på den andrederiverte:

$$O''(s_1) = 2 \cdot \frac{2A}{s_1^3} = \frac{4A}{s_1^3}$$

og det er opplagt at $O''(s_1) > 0$ for alle $s_1 \in (0, \infty)$, så $s_1 = \sqrt{A} (= 5)$ er et lokalt minimum (og dermed et globalt minimum også; O er en økende funksjon av s_1 for $s_1 > \sqrt{A}$ og minkende for $s_1 < \sqrt{A}$). Så den minste mulige omkretsen blir dermed

$$O(\sqrt{A}) = 2 \left(\sqrt{A} + \frac{A}{\sqrt{A}} \right) = 2 \cdot \left(5 + \frac{25}{5} \right) = 20 \text{ cm}^2$$

3. *Et rektangel har grunnlinje langs x -aksen, og de to øverste hjørnene ligger på en parabel gitt ved $y = 3 - x^2$ (som vist på figur 5.56 i læreboka). Hva er det største mulige arealet rektangelet kan ha?*

Løsning: Arealet er (som kjent, forhåpentligvis) produktet av rektangelens sidelengder, som vi betegner med s_1 og s_2 . Vi lar s_1 betegne sidelengden som er parallell med x -aksen, og s_2 den som er parallell med y -aksen. Rektangelet er (f.eks) bestemt av hvor på kurven vi velger å plassere det øvre, høyre hjørnet. Utifra spesifikasjonene kan dette gjøres i punkter $(x, y) = (x, 3 - x^2)$, forutsatt at $x > 0$ og $y = 3 - x^2 > 0$, så $3 > x^2 \Rightarrow x < \sqrt{3}$

Det er dermed opplagt at rektangelets høyde, s_1 , er gitt ved $s_2 = y = 3 - x^2$. Bredden s_2 blir simpelthen $2x$, så arealet som funksjon av x blir

$$A(x) = s_1(x)s_2(x) = 2x \cdot (3 - x^2)$$

for $x \in [0, \sqrt{3}]$ (endepunktene, $x = 0$ og $x = \sqrt{3}$, gir “degenererte” rektangler med areal 0). For å bestemme et globalt maksimum på $[0, \sqrt{3}]$ for A , deriverer vi med hensyn på x :

$$\begin{aligned}A'(x) &= 2(3 - x^2) - 4x^2 = 6(1 - x^2) \\ A''(x) &= -12x\end{aligned}$$

Vi ser at $A'(x) = 0, x \in [0, \sqrt{3}]$ hvis og bare hvis $x = 1$. I dette punktet er $A''(x) < 0$, så dette er et lokalt maksimum. I endepunktene har vi $A(0) = 0$ og $A(\sqrt{3}) = 0$, så $A(1) = 2(3 - 1) = 4$ er et globalt maksimum for $A(x)$, og dette er dermed det største mulige arealet vi kan oppnå.

15. Finn dimensjonene på en sylinderformet boks som har volum 1 liter (= 1000 cm^3) og som minimaliserer materialbruken (flateareal).

Løsning: En sylinder kan spesifiseres ved hjelp av to parametere, nemlig (f.eks) radius r for grunnflaten og høyde h . Dermed blir volumet lik $V = \pi r^2 \cdot h$. Siden volumet er fiksért til 1000 cm^3 , har vi

$$1000 = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

så vi kan betrakte høyde som en funksjon av grunnflatens radius. Vi ønsker å minimalisere flatearealet, som naturligvis er gitt ved

$$A = 2 \cdot (\pi r^2) + (2\pi r) \cdot h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2 \left(\pi r^2 + \frac{1000}{r} \right)$$

Vi ønsker nå å finne den r som minimaliserer A (dette bestemmer dimensjonene fullstendig). Vi finner $A'(r)$ og $A''(r)$:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2 \left(2\pi r - \frac{1000}{r^2} \right) = 4 \left(\pi r - \frac{500}{r^2} \right) \\ A''(r) &= 4 \left(\pi + \frac{1000}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Vi ser at $A'(r) = 0$ hvis og bare hvis $\pi r - \frac{500}{r^2} = 0$, dvs

$$\pi r = \frac{500}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{500}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

Vi ser også at $A''(r) > 0$ for alle $r > 0$, så $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ er et lokalt minimum på et eller annet intervall som inneholder dette punktet. Men siden $A'(r) > 0$ for $r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, er funksjonen økende på høyre side av dette punktet; likeledes er $A'(r) < 0$ for $r \in (0, \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}]$, så vi kan heller ikke finne lavere funksjonsverdier når $r \rightarrow 0$. Dermed er $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ et globalt minimum, og tilhørende høyde for den resulterende sylindren er gitt ved

$$\begin{aligned} h &= \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{500^2}{\pi^2}}} = \frac{1000}{\sqrt[3]{500^2 \pi}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1000^3}{500^2 \pi}} = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{500}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \end{aligned}$$

så høyden blir eksakt lik 2 ganger radien (dvs diameteren) på sylindrens grunnflate.

17. En sirkelsektor med radius r og vinkel θ har areal A . Finn r og θ slik at omkretsen blir minst mulig dersom (a) $A = 2$ og (b) $A = 10$. ($A = \frac{1}{2}r^2\theta$,

og buelengden s (se figur 5.59 s. 297 i læreboka) er gitt ved $s = r\theta$, når θ er målt i radianer.)

Løsning: Omkretsen til en slik sirkelsektor er gitt ved

$$O(r, \theta) = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$$

Dersom vi antar at $A = \frac{1}{2}r^2\theta = A_0$, der $A_0 \in \{2, 10\}$, betyr det at $\theta = \frac{2A_0}{r^2}$. Dermed kan omkretsen uttrykkes ved hjelp av en enkelt parameter, f.eks r , slik

$$O(r) = r(2 + \theta) = r \left(2 + \frac{2A_0}{r^2} \right) = 2 \left(r + \frac{A_0}{r} \right)$$

Så problemet består nå i å finne et globalt minimum for $O(r)$, med $r > 0$. Vi finner først de kritiske punktene ved derivasjon:

$$\begin{aligned} O'(r) &= 2 \left(1 - \frac{A_0}{r^2} \right) \\ O''(r) &= 2 \cdot - \left(\frac{-2A_0}{r^3} \right) = \frac{4A_0}{r^3} \end{aligned}$$

Vi ser at dersom $r > 0$ er $O'(r) = 0$ bare dersom $r = \sqrt{A_0}$, og det er opplagt at $O''(r) > 0$ for alle $r > 0$, så dette er faktisk et lokalt minimum. Forøvrig er funksjonen O minkende på intervallet $(0, \sqrt{A_0})$ og økende på intervallet $(\sqrt{A_0}, \infty)$, slik at dette faktisk er et globalt minimumspunkt for O .

Med de oppgitte verdiene resulterer dette i $r = \sqrt{2}$ i oppgave (a), og $r = \sqrt{10}$ i oppgave (b), og siden $\theta = \frac{2A_0}{(\sqrt{A_0})^2} = 2$ blir vinkelen θ lik 2 radianer ($= 2/(\frac{\pi}{180})^\circ \approx 115^\circ$) i begge deloppgaver.

22. Optimal reproduksjonsalder (fra Roff, 1992) En bestemt klasse² organismer kjennetegnes ved at de formerer seg kun en gang i løpet av livet. Eksempler på denne type reproduksjonsmønster kan finnes i Atlanterhavslaks og bambus. Per capita vekstrate, r , kan betraktes som et mål på reproduktiv egnethet. Jo større r , jo flere avkom vil et individ produsere. Den indre vekstrate er typisk en funksjon av alder x . Modeller for vekstrate i aldersstrukturerte populasjoner av organismer med reproduksjonsmønstre som over forutsier at den indre vekstraten som funksjon av x er gitt ved

$$r(x) = \frac{\ln[l(x)m(x)]}{x}$$

der $l(x)$ er sannsynligheten for å overleve til alder x og $m(x)$ er antall hunner født ved alder x . Den optimale alderen for reproduksjon er den alderen som maksimaliserer $r(x)$.

²som på engelsk omtales som "semelparous organisms"; hva som er en korrekt norsk oversettelse av dette har jeg ingen anelse om.

- (a). Finn den optimale reproduksjonsalderen dersom $l(x)$ og $m(x)$ er gitt ved

$$l(x) = e^{-ax}$$

og

$$m(x) = bx^c$$

der a, b og c er positive konstanter.

Løsning: Vi er altså interessert i å finne det globale maksimum for funksjonen

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{\ln[l(x)m(x)]}{x} = \frac{\ln[e^{-ax} \cdot bx^c]}{x} \\ &= \frac{-ax + c \ln(bx)}{x} = -a + \frac{c \ln(bx)}{x} \end{aligned}$$

Vi gjør dette på vanlig måte, ved først å finne den første og andre deriverte av r med hensyn på x :

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{x \cdot \frac{c}{bx} \cdot b - c \ln(bx) \cdot 1}{x^2} = \frac{c(1 - \ln(bx))}{x^2} \\ r''(x) &= \frac{c(x^2 \cdot -\frac{1}{bx} \cdot b - 2x \cdot (1 - \ln(bx)))}{x^4} \\ &= \frac{c(-x - 2x(1 - \ln(bx)))}{x^4} = \frac{cx(-1 - 2 + 2 \ln(bx))}{x^4} \\ &= \frac{c(2 \ln(bx) - 3)}{x^3} \end{aligned}$$

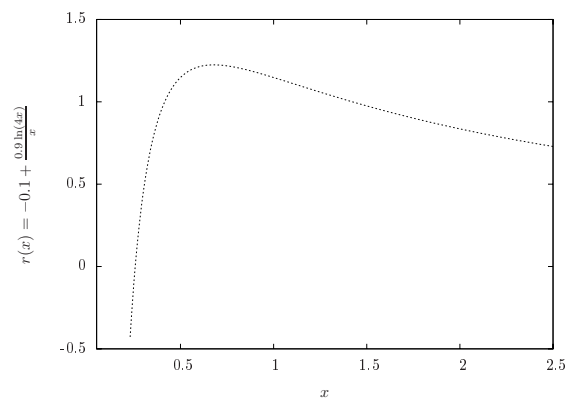
Av dette ser vi at $r'(x) = 0$ hvis og bare hvis $\ln(bx) = 1$, så $bx = e$ og dermed er $x = \frac{e}{b}$. Vi setter inn $x = \frac{e}{b}$ i $r''(x)$, som gir

$$r''\left(\frac{e}{b}\right) = \frac{c(2 \ln(b \cdot \frac{e}{b}) - 3)}{(\frac{e}{b})^3} = \frac{-3c}{(\frac{e}{b})^3} < 0$$

siden $c > 0$ og $\frac{e}{b} > 0$. Så dette er et lokalt maksimum. Vi sjekker fortegnet på $r'(x)$ for å avgjøre om dette faktisk er et globalt maksimum; anta $x < \frac{e}{b}$; i det tilfellet er $\ln(bx) < 1$, så $1 - \ln(bx) > 0$, og funksjonen $r(x)$ er dermed stigende på det åpne intervallet $(0, \frac{e}{b})$. Funksjonen $\ln(x)$ er stigende, så for $x > \frac{e}{b}$ er $r'(x) < 0$, så funksjonen $r(x)$ er minkende på intervallet $[\frac{e}{b}, \infty)$. Dermed må $x = \frac{e}{b}$ være det globale maksimum for $r(x)$, så den optimale reproduksjonsalderen er dermed $x = \frac{e}{b}$.

- (b) *Bruk en kalkulator (graftegner) for å skissere grafen til $r(x)$ når $a = 0.1$, $b = 4$ og $c = 0.9$.*

Løsning: Grafen er vist på figur (1). Merk at $\frac{e}{b} = \frac{e}{4} = 0.679570\dots$, så maksimumspunktet er nøyaktig der vi forventer at det skal være.



Figur 1: Grafen til $r(x) = -a + \frac{c \ln(bx)}{x}$ for $a = 0.1$, $b = 4$ og $c = 0.9$.