

Løsningsforslag, Øving 8

MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 307-308

I oppgavene 3,9,17,25 og 39, bruk l'Hospital's regel for å evaluere de oppgitte grensene.

3.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$$

Løsning: Vi ser at $\lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 + x - 6 = 2(-2)^2 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$ og $\lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = -2 + 2 = 0$, så betingelsene for bruk av l'Hospital's regel er oppfylt. Vi har dermed at

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x + 1}{1} = 4 \cdot (-2) + 1 = -7$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \tan(x)}$$

Løsning: Igjen er dette en kvotient av to funksjoner hvis verdier konvergerer mot 0 når $x \rightarrow 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x)) = 0$ og $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan(x) = 0 \cdot 0 = 0$), så l'Hospitals regel kan brukes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+\sin(x)}{\tan(x) + \frac{x}{\cos^2 x}}$$

Uttrykket på høyre side har de samme problemene som uttrykket vi startet med; dvs at både teller og nevner går mot 0 når $x \rightarrow 0$. Vi forsøker derfor l'Hospital's regel en gang til

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\tan(x) + \frac{x}{\cos^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1 \cdot \cos^2(x) + 2x \cos(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^4(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)} \left(1 + \frac{\cos(x) - 2x \sin(x)}{\cos(x)} \right)} \\ &= \frac{1}{1 \left(1 + \frac{1 - 2 \cdot 0}{1} \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2}$$

Løsning: Dette er et ubestemt uttrykk på formen $\frac{\infty}{\infty}$, siden $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x))^2 = \infty$ og $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$. Vi skriver om litt og gjør bruk av kontinuitet, for deretter å derivere over og under brøkstrekken og bruke l'Hospital's regel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} \right)^2 = 0^2 = 0$$

25.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sec(x)$$

Løsning: Dette er et ubestemt uttrykk på formen $0 \cdot \infty$ (i den forstand at $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec(x) = \infty$, og grensen av det andre uttrykket er opplagt lik 0). Vi skriver først uttrykket som en kvotient:

$$\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sec(x) = \frac{\pi/2 - x}{\frac{1}{\sec(x)}} = \frac{\pi/2 - x}{\cos(x)}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sec(x) &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\pi/2 - x}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

39.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$$

Løsning: Dette er et ubestemt uttrykk på formen 1^∞ , og i likhet med eksempel 12 i boka skriver vi om på følgende måte:

$$\left(\frac{x}{1+x} \right)^x = e^{x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}$$

og ved bruk av kontinuitet av eksponensialfunksjonen har vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}$$

så problemet er redusert til å finne grensen $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$, som ved innsetting gir et ubestemt uttrykk på formen $0 \cdot \infty$, som kan bestemmes

ved bruk av metodene over (se også eksempel 7 og 8 side 303 i læreboka):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x}{1+x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1 \cdot (1+x) - 1 \cdot x}{(1+x)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x(1+x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x} = -1\end{aligned}$$

så dermed er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)} = e^{-1} = 0.367879441 \dots$$

45. *Bestem grensen*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5}{x + 1}$$

(Husk å sjekke at betingelsene for bruk av l'Hospitals regel er oppfylt.)

Løsning: Her er betingelsene for bruk av l'Hospital's regel *ikke* oppfylt; både grensen til teller og nevner eksisterer og er forskjellig fra 0. Grensen er derfor svært enkel å bestemme, da

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 5}{\lim_{x \rightarrow 1} x + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

2 Læreboka s. 324-325

5. *Bruk Newton-Raphson metoden for å løse ligningen*

$$\sin(x) = \frac{1}{2}x$$

på intervallet $(0, \pi)$.

Løsning: Plott av funksjonen indikerer at $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$ har en rot på intervallet $(0, \pi)$, og at denne ligger et sted i nærheten av $x = 2$ ($\sin(2) - 1 = 0.90929 \dots - 1 = -0.0907 \dots$), så vi setter $x_0 = 2$ og iterer følgende formel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{\sin(x) - \frac{x}{2}}{\cos(x) - \frac{1}{2}}$$

Dette gir $x_0 = 2$, $x_1 \approx 1.901$, $x_2 \approx 1.896$ osv... Med $x = 1.896$ har vi $f(x) = \sin(1.896) - \frac{1.896}{2} = -0.000414 \dots$

3 Læreboka, s. 355-358

I oppgavene 19 og 22, skriv den oppgitte summen i sigma-notasjon (Σ).

19. $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

Løsning: Alle leddene er partall, dvs. på formen $2k$ for $k = 1, 2, \dots, n$.
Dermed kan vi skrive

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k$$

22. $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \dots + (-1)^n a^n$.

Løsning: Vi ser at alle leddene i summen er potenser av a , dvs $a^0 = 1, a^1 = a, a^2, \dots, a^k$, bortsett fra at fortegnet er positivt/negativt avhengig av om potensen er odde eller like. Siden $(-1)^k = 1$ hvis k er partall og $(-1)^k = -1$ hvis k er odde, ser vi at alle leddene er på formen $(-1)^k a^k$ for $k = 0, 1, \dots, n$. Vi har dermed at summen kan skrives i Σ -notasjon på følgende måte

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \dots + (-1)^n a^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a^k$$

I oppgavene 25, 29 og 30, bruk de algebraiske reglene for regning med summer til å regne ut hver av summene. Husk at

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

og

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

25. $\sum_{k=0}^6 k(k+1)$

Løsning:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 k(k+1) &= \sum_{k=0}^6 (k^2 + k) = \sum_{k=0}^6 k^2 + \sum_{k=0}^6 k \\ &= \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^6 k = \frac{6(6+1)(2 \cdot 6 + 1)}{6} + \frac{6(6+1)}{2} \\ &= 7 \cdot 13 + 3 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = 112 \end{aligned}$$

29. $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k$

Løsning:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (-1)^k &= \sum_{k=1}^5 (-1)^{2k} + \sum_{j=1}^5 (-1)^{2j-1} \\ &= \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{j=1}^5 (-1) = 5 - 5 = 0\end{aligned}$$

30. $\sum_{k=1}^{11} (-1)^k$

Løsning:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11} (-1)^k &= \sum_{k=1}^5 (-1)^{2k} + \sum_{j=1}^6 (-1)^{2j-1} \\ &= \sum_{k=1}^5 1 + \sum_{j=1}^6 (-1) = 5 - 6 = -1\end{aligned}$$

Vi kan også gjøre bruk av resultatet fra oppgave 29:

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k = \sum_{k=1}^{10} (-1)^k + (-1)^{11} = 0 + (-1) = -1$$

35. *Approximér*

$$\int_{-2}^2 (2 + x^2) dx$$

ved bruk av fire delintervaller (evaluer funksjonen i venstre endepunkt på hvert delintervall).

Løsning: Vi deler opp $[-2, 2]$ i fire like delintervaller med bredde $\Delta x = 1$, dvs $[-2, 2] = [-2, -1] \cup [-1, 0] \cup [0, 1] \cup [1, 2]$. Vi approksimerer arealet av området under grafen til funksjonen på hvert intervall ved $f(x_i)\Delta x = f(x_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ og $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$. Det gir

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (2 + x^2) dx &\approx \sum_{i=1}^4 (2 + x_i^2) \Delta x = \sum_{i=1}^4 2 + \sum_{i=1}^4 x_i^2 \\ &= 8 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 14\end{aligned}$$

(Eksakt svar: $\int_{-2}^2 (2 + x^2) dx = 8 + \frac{16}{3} = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$.)

38. (a). Anta at $a > 0$. Bestem $\int_0^a x dx$ ved å gjøre bruk av at området i planet avgrenset av linjen $y = x$ og x -aksen fra 0 til a er en trekant (se figur 6.23 i boka).

Løsning: Arealet under denne grafen blir en (rettvinklet) trekant med grunnlinje a og høyde a , og har dermed areal lik $\frac{1}{2}a^2$. Altså er

$$\int_0^a x dx = \frac{1}{2}a^2$$

- (b). Under samme antagelser som over, bestem samme integral ved å approksimere området avgrenset av $y = x$ med rektangler. Bruk like delintervaller og evaluer funksjonen i høyre endepunkt på hvert intervall. (Hint: Bruk resultatet fra eksempel 3 i læreboka til å bestemme summen av arealene av rektanglene.)

Løsning: Vi ønsker å dele opp intervallet $[0, a]$ i N delintervaller, approksimere integralet og deretter la $N \rightarrow \infty$. Vi bruker like delintervaller, med bredde $\Delta x = \frac{a}{N}$. Dette blir intervaller på formen $[\frac{a(i-1)}{N}, \frac{ai}{N}]$ og funksjonen skal evalueres i høyre endepunkt, dvs $\frac{ai}{N}$ for $i = 1, \dots, N$. Vi har dermed

$$\begin{aligned} \int_0^a x \, dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{ai}{N} \cdot \frac{a}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a^2}{N^2} \sum_{i=1}^N i \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a^2}{N^2} \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$