Løsningforslag, Øving 9
MA0001 Brukerkurs i Matematikk A

1 Læreboka s. 371-374

9. *Finn* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, *dersom* $y(x)$ *er gitt ved*

$$y = \int_3^x ue^{4u}\,\mathrm{d}u$$

Løsning: Vi bruker fundamentalteoremet (del 1):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_3^x ue^{4u}\,\mathrm{d}u\right] = xe^{4x}$$

23. *Bruk Leibniz's regel for å finne* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, *når* $y(x)$ *er gitt ved*

$$y = \int_1^{3x^2+x} (1 + te^t)\,\mathrm{d}t$$

Løsning: Sett $u(x) = 3x^2 + x$. Da er

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\int_1^{u(x)} 1 + te^t\,\mathrm{d}t\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= (1 + ue^u)(3\cdot 2x + 1) = \left(1 + (3x^2 + x)e^{3x^2+x}\right)(6x + 1)\end{aligned}$$

35. *Bruk Leibniz's regel for å finne* $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, *når* $y(x)$ *er gitt ved*

$$y = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t)\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$$

Løsning: Bruk av Leibniz's regel gir:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \ln(x^3)\cdot 3x^2 - \ln(x^2)\cdot 2x\\ &= \ln(x)(9x^2 - 4x)\end{aligned}$$

101. *Regn ut det bestemte integralet*

$$\int_1^8 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x$$

Løsning: Funksjonen $f(x) = x^{-2/3}$ er integrerbar på intervallet $[1, 8]$ (den er kontinuerlig), og der er lett å se at $3x^{1/3}$ er en antiderivert for f. Dermed blir (vi gjør bruk av fundamentalteoremet del 2):

$$\int_1^8 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = \Big[3x^{1/3}\Big]_1^8 = 3(\cdot 8^{1/3} - 1^{1/3}) = 3\cdot(2-1) = 3$$

109. *Regn ut det bestemte integralet*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Løsning: Siden $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, så er $\arctan(x)$ en antiderivert for integranden. Fundamentalteoremet gir:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

121. *Regn ut det bestemte integralet*

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u$$

Løsning: Vi bruker at $\frac{\mathrm{d}\ln(1-x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{1-x}$, slik at

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u &= -\int_{-2}^{-1} \frac{-1}{1-u}\,\mathrm{d}u\\ &= -\left[\ln(1-(-1)) - \ln(1-(-2))\right]\\ &= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

123. *Bruk l'Hospital's regel til å regne ut*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t$$

Løsning: Sett $F(x) = \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$. Da er $F(x)$ kontinuerling (faktisk deriverbar ifølge fundamentalteoremet), og dermed blir

$$\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^0 \sin(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Siden $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, kan l'Hospital's regel brukes. Vi har (fra fundamentalteoremet) at $F'(x) = \sin(x)$ og $\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} = 2x$, så

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Den siste grensen er velkjent, og lik 1, og dermed er $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$. De som ikke er overbevist, kan notere seg at $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ (ved kontinuitet), så l'Hospital's regel kan brukes igjen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{2}$$

125. *Anta at*

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2x^2$$

Bestem funksjonen f.

Løsning: Fra fundamentalteoremet har vi at dersom

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

så er $F'(x) = f(x)$ (under visse betingelser, som vi kan (og må) anta oppfyllt her). Dermed har vi, med $H(x) = 2x^2$, at $H'(x) = f(x)$, så $H'(x) = 4x = f(x)$.

2 Læreboka, s. 395-396

1. *Når man studerer vannstrømmen i en åpen kanal, som f.eks en elvs utspring, så er den totale vannmengden Q som passerer gjennom et tverrsnitt per sekund av interesse. Følgende formel kan brukes for å beregne strømmen:*

$$Q = \int_0^B \bar{v}(b)h(b)\,\mathrm{d}b \tag{1}$$

der b er avstanden fra en elvebredd til det punktet der dybden av elven $h(b)$ og gjennomsnittet $\bar{v}(b)$ av den vertikale hastighetsprofilen til elven i b ble målt. Den totale bredden av tverrsnittet er B (se figur 6.48, side 395 i læreboka). For å regne ut integralet i (1), må vi vite $\bar{v}(b)$ og $h(b)$ i hvert punkt b langs tverrsnittet. I praksis deler vi opp tverrsnittet i et endelig antall delintervaller, og gjør målinger av $\bar{v}$ og h i (f.eks) høyre endepunkt i hvert delintervall. Følgende tabell (1) inneholder et eksempel på slike målinger. Punktet $b = 0$ svarer til venstre elvebredd og punktet $B = 16$ svarer til høyre elvebredd. Enhetene for posisjon b og dybde h er meter, og for $\bar{v}$, meter per sekund. Approksimer integralet (1) med en Riemannsum, ved bruk av posisjonene i tabellen, og finn den omtrentlige gjennomstrømningen Q ved bruk av dataene fra tabellen.

Posisjon (b)	h	$\bar{v}$
0	0	0
1	0.28	0.172
3	0.76	0.213
5	1.34	0.230
7	1.57	0.256
9	1.42	0.241
11	1.21	0.206
13	0.83	0.187
15	0.42	0.116
16	0	0

Tabell 1: Målinger av dybde og gjennomsnittlig vertikal hastighetsprofil i en elv

Løsning: Dette er rimelig rett frem; utifra posisjonene vi har gjort målingene i, ser vi at intervallet $[0, 16]$ er oppdelt i 9 delintervaller, nemlig $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 5]$, $\ldots$, $[13, 15]$, $[15, 16]$. Vi har målinger i både venstre og høyre endepunkt for alle disse intervallene, og resultatet vil avhenge noe av hvordan vi velger å approksimere integralet. Dersom vi velger venstre endepunkt, får vi en Riemannsum på formen

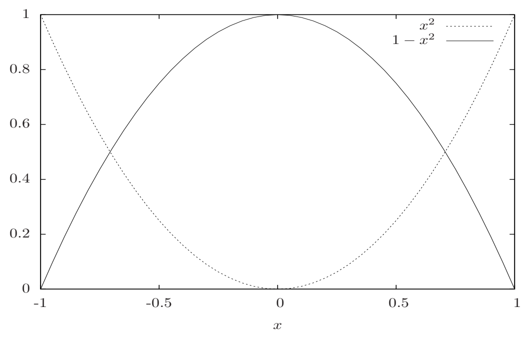
$$\begin{aligned}\int_0^{16} \bar{v}(b)h(b)\,\mathrm{d}b &\approx 0.28 \cdot 0.172 \cdot 1 + 0.76 \cdot 0.213 \cdot 2 \\ &\quad + 1.34 \cdot 0.230 \cdot 2 + \ldots + 0.42 \cdot 0.116 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 1 \\ &\approx 3.38 \frac{\mathrm{m}^3}{s}\end{aligned}$$

Alternativt, kan høyre endepunkter benyttes, noe som avrundet gir samme svar, nemlig $3.38 \frac{\mathrm{m}^3}{s}$ (dvs. at forskjellen i svar som disse to metodene gir er mindre enn $5 \cdot 10^{-3}$).

3 Læreboka, s. 392-395

1. *Finn arealet av området i planet begrenset av kurvene $y = e^x$, $y = -x$, $x = 0$ og $x = 2$. (Hint: skissér kurvene $y = e^x$ og $y = -x$ for x mellom 0 og 2 i samme koordinatsystem, og se om du får en idé når du ser på figuren.)*

   Løsning: Siden $e^x > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og $-x < 0$ for $x > 0$, så har vi naturligvis $e^x > -x$ for alle $x \in [0, 2]$ (noe skisséring av kurvene definitivt også ville avslørt). Dermed er arealet avgrenset av disse to kurvene simpelthen lik integralet av differansen $e^x - (-x) = e^x + x$ over $[0, 2]$. Dette er forholdsvis enkelt, da $e^x + \frac{1}{2}x^2$ åpenbart er en antiderivert for differansen.



Figur 1: Området i xy-planet fra Oppgave A

Det gir

$$A = \int_0^2 e^x + x\,\mathrm{d}x = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(e^2 + \frac{1}{2}\cdot 2^2\right) - \left(e^0 + \frac{1}{2}\cdot 0^2\right)$$
$$= e^2 + 2 - 1 - 0 = e^2 + 1$$

4 Oppgave A

Grafen til $y = x^2$ og grafen til $y = 1-x^2$ avgrenser et lite område i xy-planet når de tegnes inn i samme koordinatsystem. Finn arealet av dette området. (Hint: skisser grafene i samme koordinatsystem først.)

Løsning: Grafene er tegnet på figur (1).

Vi finner først skjæringspunktene for grafene, dvs de punktene der $x^2 = 1 - x^2$, altså $x^2 = \frac{1}{2}$ eller $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. På intervallet $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ er $1 - x^2 > x^2$, slik at arealet A som avgrenses blir

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - x^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - 2x^2\,\mathrm{d}x$$

Integranden har en antiderivert $x - \frac{2}{3}x^3$, så integralet blir

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 1 - 2x^2\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$$
$$= \sqrt{2} - 2\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \sqrt{2}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{(\sqrt{2})^2}{8}\right) = \sqrt{2}(1 - \frac{2}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$$