MA0001 2004H. Løsningsskisse

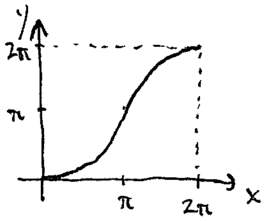
1(a) $f'(x) = 1 - \cos x$, $f''(x) = \sin x$.

$f'(x) > 0$ for alle $x \in (0, 2\pi)$, $f'(0) = f'(2\pi) = 0$, så f er strengt voksende i $[0, 2\pi]$. Abs. min. i 0, abs. maks. i 2π.

Nullpkt. i 0, ingen flere nullpkt. siden f er strengt voksende.

$f''(x) > 0$ for $x \in (0, \pi)$ og $f''(x) < 0$ for $x \in (\pi, 2\pi)$. Vendepkt. i π.

(b)



2. $\int_0^{2\pi} x f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - x\sin x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx = \frac{8}{3}\pi^3 - \int_0^{2\pi} x \sin x\,dx$.

$\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx = [x \cdot (-\cos x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot (-\cos x)\,dx$ (delv. int.)

$= -2\pi + [\sin x]_0^{2\pi} = -2\pi$.

Så $\int_0^{2\pi} x f(x)\,dx = \frac{8}{3}\pi^3 + 2\pi$.

3(a) f har invers funksjon fordi den er strengt voksende, og dermed én-entydig. Definisjonsmengden er verdimengden til f, $[0, 2\pi]$.

(b) $f'''(x) = \cos x$. $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$. Så tredjegrads taylorpolynom om 0 er $P(x) = \frac{1}{3!}x^3 = \frac{1}{6}x^3$. Bruker invers funksjon av denne som tilnærmelse til f^{-1}. $y = \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6y}$.
$f^{-1}(1/10) \approx \sqrt[3]{6 \cdot \frac{1}{10}} = \sqrt[3]{0{,}6} \approx 0{,}84$ [virkelig verdi er 0,85 med to desimaler].

4. Implisitt derivasjon: $2y\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - \cos x$, $(2y+1)\frac{dy}{dx} = 1 - \cos x$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{2y + 1}$.