13/12 -2006

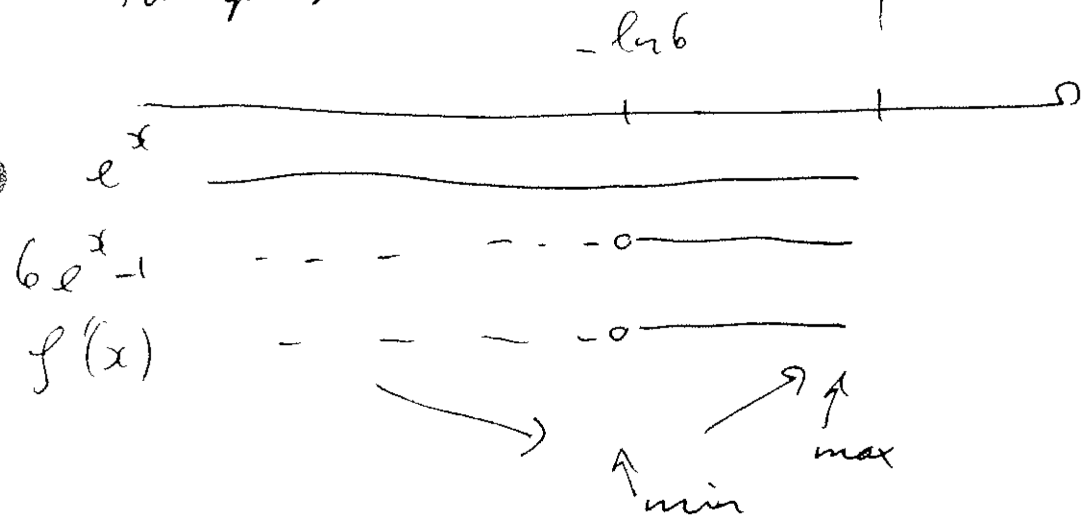
1 $f(x) = 3e^{2x} - e^{x} - 2, \quad x \leq 1$

a) $f'(x) = 6e^{2x} - e^{x}$

For å finne ekstremalpunkter må vi sjekke $f'(x) = 0$ og endepunktet $x = 1$.

$f'(x) = 0 \quad 0 = 6e^{2x} - e^{x} = e^{x}(6e^{x} - 1)$. $e^{x} > 0$ alltid, så $6e^{x} - 1 = 0 \quad e^{x} = \frac{1}{6}$, $x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6$.

Fortegnskjema:



$f(1) = 3e^{2} - e^{1} - 2$, og $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$ siden $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$,

så 1 er globalt maksimum og $-\ln 6$ (som det eneste lokale minimum) er globalt minimum.

f synker på $(-\infty, -\ln 6]$ og stiger på $[-\ln 6, 1]$.

$f(x) = 0$: $\quad 3(e^{x})^{2} - e^{x} - 2 = 0$

$$e^{x} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^{2} - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$e^{x} = -\frac{2}{3}$ har ingen reell løsning, så vi får bare ett nullpunkt for $e^{x} = 1$ eller $x = \ln 1 = 0$

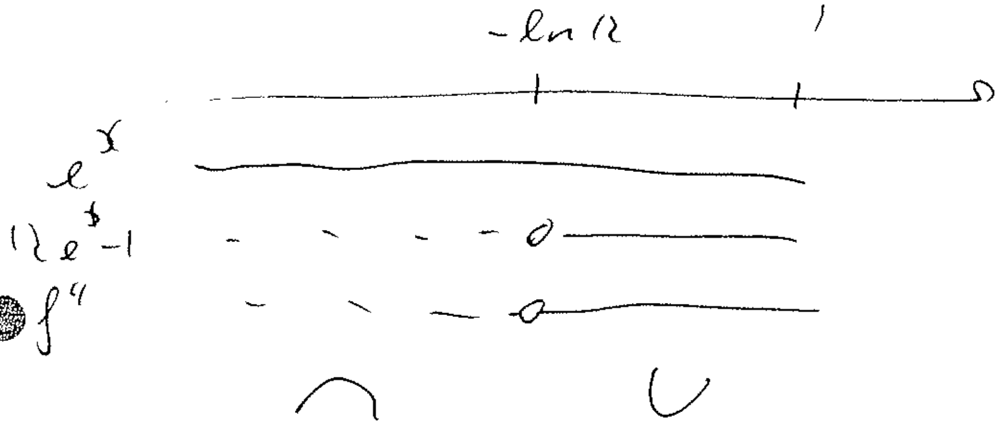
b) $f''(x) = 12e^{2x} - e^{x} = e^{x}(12e^{x} - 1)$

For å finne vendepunkt må vi finne punkter der f'' skifter fortegn:

$f''(x) = 0$, $0 = e^{x}(12e^{x} - 1)$ gir

$12e^{x} - 1 = 0$ eller $x = \ln\frac{1}{12} = -\ln 12$.

Fortegnsskjema:



$-\ln 12$: vendepunkt

konkav opp: $[-\ln 12, \infty)$

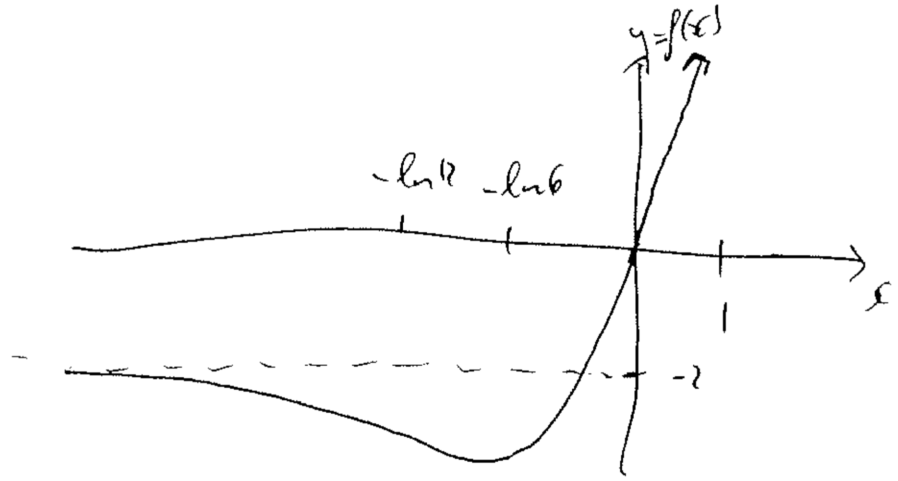
konkav ned: $(-\infty, -\ln 12]$

Eneste mulige asymptote er når $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3e^{2x} - e^{x} - 2 = 0 - 0 - 2 = -2$$

Så $x = -2$ er horisontal asymptote.

c)



d) Når $x>0$ er $f(x)>0$ (fra tidligere), så arealet er

$$\underline{A} = \int_0^{\ln 2} (3e^{2x} - e^x - 2)\,dx = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x \Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{3}{2}e^{2\ln 2} - e^{\ln 2} - 2\ln 2 - \left(\frac{3}{2}e^0 - e^0 - 2\cdot 0\right)$$

$$= \frac{3}{2}4 - 2 - 2\ln 2 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2}(12 - 4 - 3 + 2) - 2\ln 2 = \underline{\frac{7}{2} - 2\ln 2}$$

2 $\quad f(x) = \ln(x^2+1)$. $\qquad f(0) = \ln 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}2x = \frac{2x}{x^2+1} \qquad f'(0) = \frac{2\cdot 0}{0^2+1} = 0$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \quad f''(0) = \frac{-2\cdot 0^2+2}{(0^2+1)^2} = 2$$

$$\underline{P_2(x)} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \underline{x^2}$$

$$\underline{\int_{-0,1}^{0,1} \ln(x^2+1)\,dx} \approx \int_{-0,1}^{0,1} P_2(x)\,dx = \int_{-0,1}^{0,1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-0,1}^{0,1} = \underline{\frac{2}{3}\cdot 0{,}001}$$

3 $\quad y^2 + x\cos y = x^2$ $\quad$ Implisitt derivasjon gir

$$2y\frac{dy}{dx} + \cos y + x(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 2x. \qquad \text{Setter inn } x = -\frac{\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{2}$$

$$2\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx} + \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx} = -2\frac{\pi}{2}$$

$$\pi\frac{dy}{dx} + 0 + \frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx} = -\pi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\pi}{\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

$$L(x) = m(x - x_0) + y_0 = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}$$