3/6-2006

① a) $f(x) = x + \frac{25}{x}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 + 25 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{25}{x^2}$$

$$f''(x) = -25\left(-2\frac{1}{x^3}\right) = \frac{50}{x^3}$$

$f(x) = 0$: $\quad x + \frac{25}{x} = 0$

$x^2 + 25 = 0$ ingen løsning; <u>ingen 0-pkt</u>

$f'(x) = 0$: $\quad 1 - \frac{25}{x^2} = 0$

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$ ← to mulige punkter for ekstremalpunkter.

$f''(x) = 0$: $\quad \frac{50}{x^3} = 0$ ingen løsning; <u>ingen vendepkt</u>

For ekstremalpunkter må vi også sjekke hva som skjer nær null og mot $\pm\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

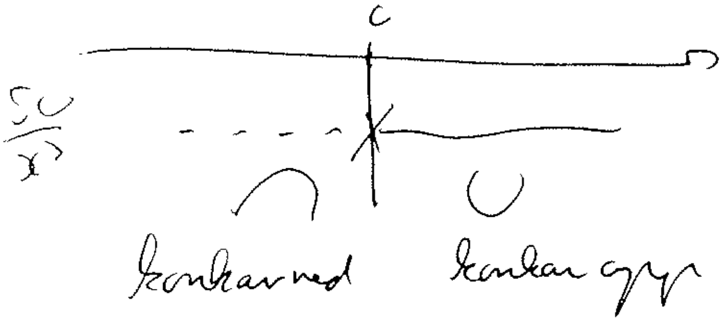
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

Fortegnsskjema for f':

		-5		0		5	
$x-5$	$-$		$-$	X	$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	0	$+$	X	$+$		$+$
f'	$+$	0	$-$	X	$-$	0	$+$
	↗		↘		↘		↗

Vi ser at det er <u>lokalt maks i $x=-5$</u> ($f(-5) = -10$) og <u>lokalt min. i $x=5$</u> ($f(5)=10$). Siden f går mot ∞ og $-\infty$ (ved å ~~gå~~ la $x \to \infty$ f.eks.) ser vi at f <u>ikke har globale ekstremalpunkter</u>.

b) Konkavitet: fortegnsskjema for f'':



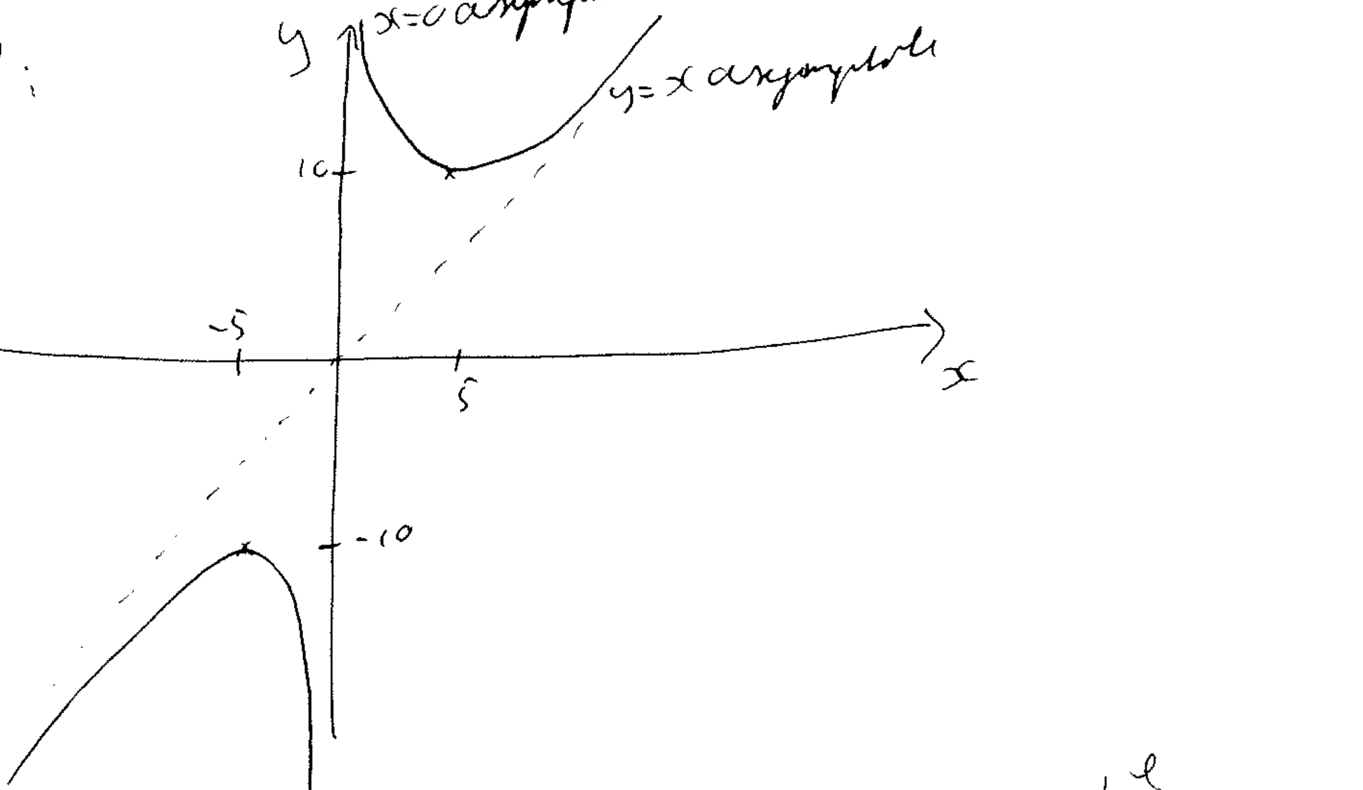
Skråasymptote: ~~...~~ $y = x$ peker seg ut. Vi sjekker

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} x + \frac{25}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{25}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{25}{x} = 0$$

OK $y = x$ er skråasymptote både når $x \to -\infty$ og når $x \to \infty$

Graf:



c) $$\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \left(x + \frac{25}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 25 \ln|x| \Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + 25 \ln|e| - \frac{1}{2}1^2 - 25 \ln|1| = \frac{1}{2}e^2 + 25 - \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{49}{2}$$

2 Taylorpolynom av grad 2 om $x=0$ for $\sin(x^2)$:

$f(x) = \sin(x^2)$

$f'(x) = \cos(x^2)2x$

$f''(x) = -\sin(x^2)2x\cdot 2x + \cos(x^2)2$

$f(0) = \sin 0^2 = 0$, $f'(0) = \cos 0^2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$f''(0) = -\sin 0^2 \cdot 4 \cdot 0^2 + \cos(0^2)\cdot 2 = 2$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2}$$

$$= 0 + 0x + \frac{2x^2}{2} = x^2$$

Dermed: $\int_0^{1/2} \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^{1/2} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 = \frac{1}{24}$

3) a) $x^2 + y^3 - 2y = 3$. Punkt: $(2,1)$

$4 + 1 - 2\cdot 1 = 3$ OK, punktet ligger på kurven.

Stigningstall til tangenten er $\frac{dy}{dx}$ evaluert i punktet.

Vi deriverer:

$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$. Sette inn $x=2, y=1$:

$4 + 3\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -4$ = stigningstallet

b) Likning for tangenten:

$y = m(x - x_0) + y_0 = -4(x-2) + 1 = -4x + 9$

3/6-2006. Elevalgsdel

1. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$

$= \underline{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C}$

Delbrøkoppspalting: $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

gir $A+B=0$, $2A-B=1$

$A=-B \quad -2B-B=1$

$A=\frac{1}{3} \qquad B=-\frac{1}{3}$

2. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \qquad \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int 1\cos x\,dx$

|| delvis integrasjon $\left.\begin{matrix} u=x & v'=\sin x \\ u'=1 & v=-\cos x \end{matrix}\right| = -x\cos x + \sin x + C$

$-x\cos x + \sin x\Big|_0^{\pi} = -\pi\cos\pi + \sin\pi - (-0\cos 0 + \sin 0)$

$= \underline{\pi}$

3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = -(a-b)\cdot(-(a+b))$

$= (b-a)(-b-a).$

4. $f(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-2t}$. Hva er maksimum?

$f'(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t}$

$f'(t) = 0$ gir $-e^{-t} + 4e^{-2t} = 0$

$-e^{-t}(1-4e^{-t}) = 0$

$1-4e^{-t} = 0$

$e^{-t} = \frac{1}{4}$

$-t = \ln(\frac{1}{4})$

$t = \ln 4$

Fortegnsskjema for f':

	$\ln 4$	
$-e^{-t}$	– – – –	– – – –
$(1-4e^{-t})$	———— 0	– – – –
f'	———— 0	– – – –

maksimum oppnås ved $t=\ln 4$, som gir

$f(\ln 4) = 1 + e^{-\ln 4} - 2e^{-2\ln 4}$

$= 1 + \frac{1}{e^{\ln 4}} - 2\frac{1}{(e^{\ln 4})^2}$

$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{16} = 1{,}125$

5. $f(t) = \ln(e^{2t}+3)$

$f'(t) = \frac{1}{e^{2t}+3} \cdot 2e^{2t} = \frac{2}{1+3e^{-2t}}$

6. halveringstid = 5730.

$f(t) = N_0 e^{at}$

$f(5730) = \frac{1}{2} N_0$ gir $\frac{1}{2} = e^{at}$ $t = 5730$

$-\ln 2 = at$

$a = \frac{-\ln 2}{5730}$

$N_0 = 50$

$f(100) = 50 \cdot e^{\frac{-\ln 2}{5730} \cdot 100} \approx 49{,}4$

7. $\frac{d}{dx} e^x e^{2x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{" l'Hopital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{2 \cdot 0}{e^0} = \frac{0}{1} = \underline{0}$

9. $f(x) = x^5 + 8x^3 + x + 1$. $f^{-1}(11) = ?$

$x^5 + 8x^3 + x + 1 = 11$

$1^5 + 8 \cdot 1^3 + 1 + 1 = 11$ så $f^{-1}(11) = 1$

(NB! Her e det bare fem forskjellige alternativer å sjekke (~~flat~~.)

10. $f(t) = -0{,}0142t^2 + 0{,}68t - 7{,}46$, $20 \le t \le 30$.

Når oppnås maksimum?

$f'(t) = -0{,}0142 \cdot 2t + 0{,}68 = -0{,}0284t + 0{,}68$

$f'(t) = 0$ gir $t = \frac{0{,}68}{0{,}0284} \approx 23{,}9$

fortegnslinje for f' — 20 — 23,9 — 30 $\qquad \underline{f(23{,}9) \approx 0{,}68}$

$-0{,}0284t + 0{,}68$: — 0 - - - -

max

lokal lokal

11 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+e^t)\,dt$. La F være en antiderivert av $\ln(1+e^t)$

Da er $f(x)=F(t)\Big|_0^{x^2}=F(x^2)-F(0)$.

$$f'(x)=F'(x^2)=\underline{\ln(1+e^{x^2})2x}$$

12. $$\int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx=\int_{x=0}^{x=\infty}-1e^u\,du=-1e^u\Big|_{x=0}^{x=\infty}=-1e^{-x^2/2}\Big|_0^{\infty}$$

$u=-x^2/2$
$du=-1x\,dx$
$-1\,du=x\,dx$

$$=\lim_{z\to\infty}-1e^{-x^2/2}\Big|_0^{z}=\lim_{z\to\infty}-1e^{-z^2/2}+1e^0$$

$$=0+1=1$$