LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I MA0001, 17.12.2007

Oppgave 1

$$(i) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{-x}} = \infty$$

fordi telleren går mot uendelig og nevneren går mot 0^+.

$$(ii) \qquad \lim_{x\to\infty} (\ln x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{x}}.$$

Her kan vi bruke L'Hoptals regel fordi vi har et ∞/∞–uttrykk. Derved er

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\,e^{x}} = 0.$$

Oppgave 2

a) Dersom mengden alger er P_n et år, så er den $P_{n+1} = P_n + \dfrac{P_n \cdot 16}{100} = 1.16\,P_n$ neste år.

Vi starter med en mengde P_0 av alger. Etter n år er den derfor vokst til $P_n = 1.16\,P_{n-1} = \cdots = (1.16)^n P_0$.

For at mengden skal fordobles, må

$$\begin{aligned} (1.16)^n &\geq 2 \\ n \cdot \ln(1.16) &\geq \ln 2 \\ n &\geq \frac{\ln 2}{\ln(1.16)} \approx 4.67. \end{aligned}$$

Mengden alger er altså fordoblet etter 5 år.

Dersom man velger å tolke oppgaven slik at algene øker jevnt gjennom året, blir svaret 4.67 år. Begge svarene godkjennes som korrekte.

b) Regningen er akkurat som i punktet over. Så lånet er (mer enn) fordoblet etter 5 år.

På guttens 26 årsdag er lånet blitt $10\,000 \cdot (1.16)^{10} = 44\,114$ kroner.

Oppgave 3 Siden parabelen går gjennom de tre punktene, må koordinatene til de tre punktene passe i ligningen. Det vil si

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 1 &= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4 &= a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \end{aligned}$$

Dette er et ligningssystem med tre ligninger og tre ukjente. Av den andre ligningen ser vi at $c = 1$. Vi setter dette inn i den første og den tredje ligningen:

$$\begin{aligned} 2 &= a + b + 1 \\ 4 &= a - b + 1 \end{aligned}$$

Vi trekker den siste ligningen ifra den første, og får $-2 = 2b$, det vil si, $b = -1$. Innsatt i den første gir det at $a = 2$.

Svar: $a = 2$, $b = -1$ og $c = 1$.

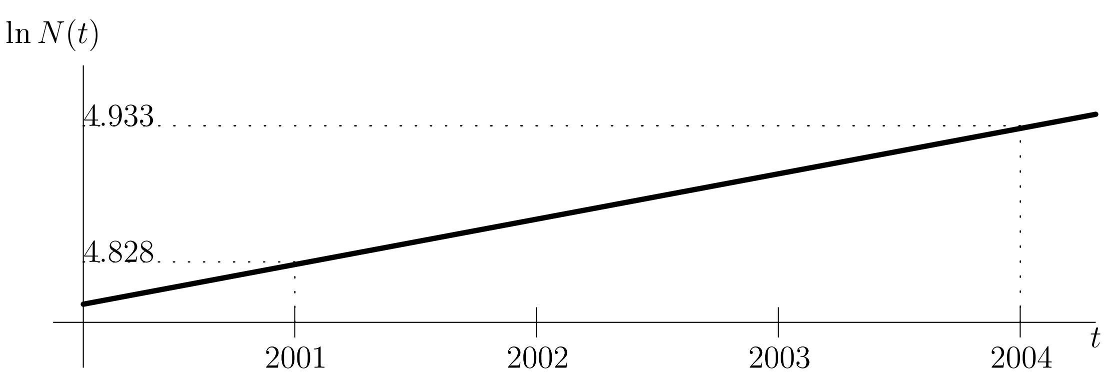
Oppgave 4

a) Gjennomsnittstemperaturen i Andeby i den første uken av juli 2007 var

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \frac{1}{7}\int_0^7 T(t)dt = \frac{1}{7}\int_0^7 (10\,e^{t-6} + \sin 2\pi t)dt = \frac{1}{7}\Big[10\,e^{t-6} - \frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\Big]_0^7 \\ &= \frac{1}{7}\Big[10\,e - \frac{1}{2\pi} - 10\,e^{-6} + \frac{1}{2\pi}\Big] = \frac{10}{7}(e - e^{-6}). \end{aligned}$$

b) Gjennomsnittstemperaturen i Andeby for de to første ukene av juli samlet må bli det samme, nemlig $\frac{10}{7}(e - e^{-6})$, fordi gjennomsnittstemperaturen i uke 2 var den samme som i uke 1.

Oppgave 5



Grafen er en rett linje som går gjennom de to punktene (2001, 4.828) og (2004, 4.933). Stigningstallet for linjen er

$$m = \frac{4.933 - 4.828}{2004 - 2001} = \frac{0.105}{3} = 0.035.$$

Linjen har derfor ligningen

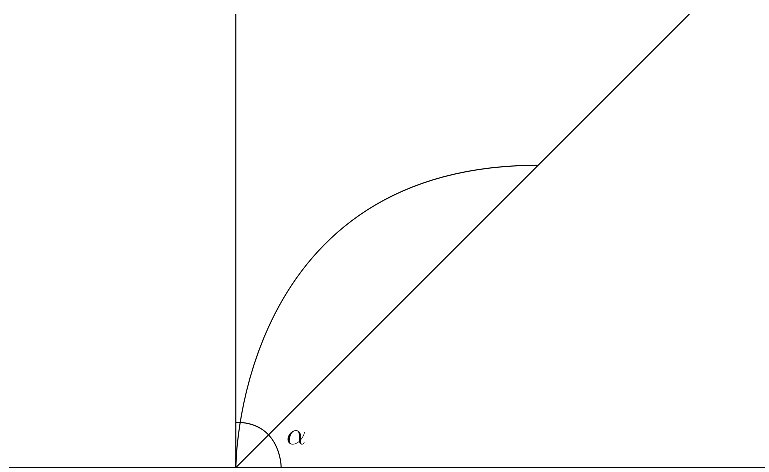
$$\ln N(t) = 4.828 + 0.035(t - 2001).$$

Vi anvender eksponensialfunksjonen på begge sider av likhetstegnet og får

$$N(t) = e^{4.828+0.035(t-2001)} \qquad \text{for } 2000 \le t \le 2020.$$

Oppgave 6

a) Koordinatsystemet



Ved tidspunkt t har ballen koordinater $(x(t), y(t))$ der

$$x(t) = \int_0^t v_x\,dt = v_0\,t\cos\alpha \qquad \text{og} \qquad y(t) = \int_0^t v_y\,dt = v_0\,t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

b) Ballen lander når $t > 0$ og $(x(t), y(t))$ treffer linjen $y = x$, det vil si når $x(t) = y(t)$, altså når

$$v_0\,t\cos\alpha = v_0\,t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Siden $t > 0$, kan vi forkorte ligningen med t. Det gir

$$v_0\,\cos\alpha = v_0\,\sin\alpha - \frac{1}{2}gt.$$

Når vi løser denne ligningen med hensyn på t, får vi svaret

$$t = \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)\,\text{sekunder}.$$

c) Ballen lander i punktet $(x(t), y(t))$ der $t = \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)$ sekunder. Den har da gått

$$s = x(t)\sqrt{2} = v_0 \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)(\cos\alpha)\sqrt{2} = f(\alpha)$$

meter opp i bakken. Vi vil maksimere s med hensyn på α der $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. Vi har

$$f(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{2}(2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{2}(\sin 2\alpha - 1 - \cos 2\alpha).$$

De kritiske punktene inntreffer der $f'(\alpha) = 0$. Vi har

$$f'(\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{2}(2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha) = 0$$

når $\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha$. Det vil si, når $2\alpha = 3\pi/4$, i.e., $\alpha = 3\pi/8$. Videre er $f'(\alpha) > 0$ for $\alpha < 3\pi/8$ og $f'(\alpha) < 0$ for $\alpha > 3\pi/8$. Derfor har $f(\alpha)$ et globalt maksimum for $\alpha = 3\pi/8$.