Løsningsforslag til eksamen:

MA 0001 29/5 -2007.

(1) En kurve er gitt ved $y + e^{xy} + e\cos\pi x = 1$

a) Likning for tangenten i $(x,y) = (1,1)$:

Deriverer: $\frac{dy}{dx} + e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - e\pi\sin\pi x = 0$

Setter inn $x = y = 1$:

$$\frac{dy}{dx} + e^{1\cdot 1}\left(1 + 1\cdot\frac{dy}{dx}\right) - e\pi\sin\pi = 0$$

eller

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e}{1+e}$$

Likning for linje $y = m(x - x_0) + y_0 =$

$$= \frac{-e}{1+e}(x-1)+1$$

$$= \frac{-e}{1+e}x + \frac{2e+1}{1+e}$$

b) Likning for tangenten til inversfunksjonen.

Siden $x=y$ er dette punktet både på grafen til funksjonen og på grafen til inversfunksjonen.

Stigningstallet er $1/(\text{stigningstallet til den opprinnelige})$:

$\frac{1}{\frac{-e}{1+e}} = -\frac{1+e}{e}$, og likningen blir

$$y = m(x-x_0)+y_0 = -\frac{1+e}{e}(x-1)+1$$

$$= -\frac{1+e}{e}x + \frac{2e+1}{e}$$

② $f(x) = x\ln x - x, \quad x > 0$

a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x - x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{x}}$, "$\frac{-\infty}{\infty}$"

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$

b) $f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0$ om $\ln x = 0$ eller $\underline{x=1}$, $f'(x) < 0$ om $0 < x < 1$

$f''(x) > 0$ når $x > 0$ $\quad f'(x) > 0$ om $x > 1$.

Så f stige på intervallet $[1,\infty)$, synke på $(0,1]$, og ha bunnpunkt (globalt) i 1.

f er konkav opp i hele definisjonsmengden.

Nullpunkt: $f(x) = 0$

$f(x) = x\ln x - x = x(\ln x - 1) = 0$

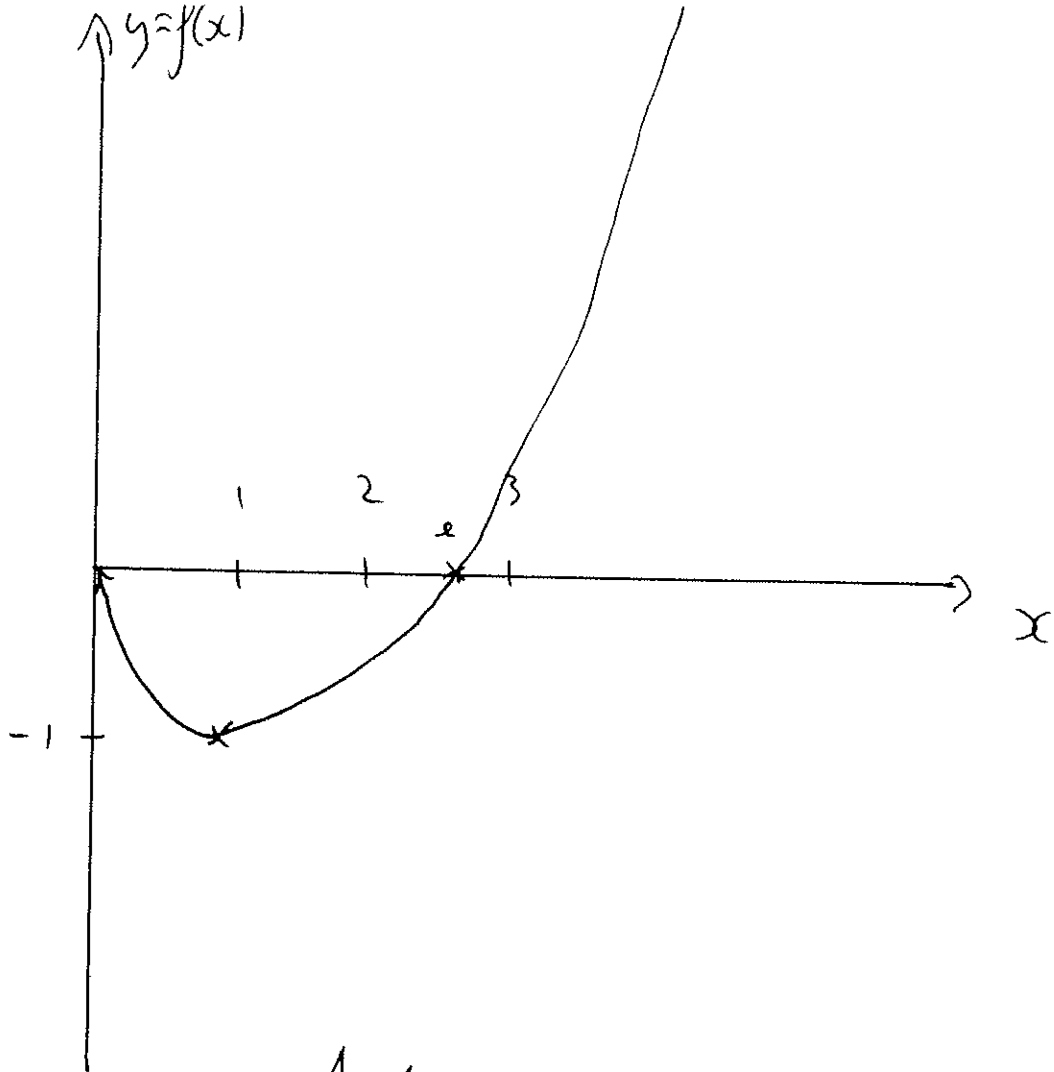
$x = 0$ utenfor definisjonsområdet $\qquad \ln x - 1 = 0$

$\underline{x = e}$

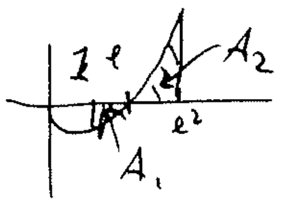
Nullpunkt for $x = e$.

Vi regner også ut $f(1) = -1$.

2c)



2d)



Siden A_1 er under x-aksen er $A_1 = -\int_1^e f(x)\,dx$, mens

$A_2 = \int_e^{e^2} f(x)\,dx$.

Først ubestemt: delvis integrasjon

$$\int (x\ln x - x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C$$

$$A = A_1 + A_2 = -\int_1^e f(x)\,dx + \int_e^{e^2} f(x)\,dx =$$

$$-\left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 \cancel{-\frac{1}{2}x^2}\right]_1^e + \left[\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right]_e^{e^2} =$$

$$-\left[\frac{1}{2}e^2\ln e - \frac{3}{4}e^2 - \left(\frac{1}{2}1^2\ln 1 - \frac{3}{4}1^2\right)\right] + \left[\frac{1}{2}e^4\ln e^2 - \frac{3}{4}e^4 - \left(\frac{1}{2}e^2\ln e - \frac{3}{4}e^2\right)\right]$$

$$= \underline{\frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{4}}$$

Eksamen i MA0001 Brukarkurs i matematikk A
Tysdag 29. mai 2007 kl. 9.00–13.00

Alle trykte og skrivne hjelpemiddel og éin lommereknar er tillatne.

Kryss av eitt svaralternativ for kvar oppgåve på skjemaet på baksida! Du får eitt poeng for kvart rette svar og null poeng for kvart gale svar. Avkryssing av fleire alternativ gir null poeng.

NB! Det er tekst på begge sidene av arket! Alle oppgåvene har fem svaralternativ.

Oppgåve 1. Ei tallfølgje er definert ved at $a_1 = 1$ og vidare rekursivt ved $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ for $n \geq 1$. Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) 0 (c) $1+\sqrt{2}$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e) 2

Oppgåve 2. Finn $\frac{d}{dx}\int_2^{\sqrt{3x}} e^{t^2}\,dt$.

(a) $\frac{3e^{3x}}{2\sqrt{3x}}$ (b) $\frac{\sqrt{3x}}{2}$ (c) e^4 (d) $e^{3x} - e^4$ (e) e^{3x}

Oppgåve 3. Kva er verdien av integralet $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$?

(a) integralet divergerer (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) $\ln(\frac{1}{2})$

Oppgåve 4. Over ei tid $t \in [0, 5]$ er gjennomsnittsvekta i ein koloni kjøttmeis tilnærma ved funksjonen $f(t) = -0{,}12t^2 + 0{,}8t + 14{,}3$, målt i gram. Kor mange gram er den største gjennomsnittsvekta?

(a) 16,01 (b) 15,33 (c) 14,30 (d) 16,63 (e) 15,63

Oppgåve 5. Finn $\frac{d}{dx}\sin^2 x \tan x$.

(a) $2\sin x\cos x\tan x$ (b) $\frac{1}{3}\sin^3 x\tan x$ (c) $\tan^2 x(2\cos^2 x + 1)$ (d) $1 - \cos^2 x\sin^2 x$ (e) $\tan^2 x$

Oppgåve 6. Finn $\lim_{x\to 13}\frac{\sqrt{x-4}-3}{2x-26}$.

(a) 1 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{12}$ (e) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Oppgåve 7. Finn $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

(a) 0 (b) $\frac{1}{6}$ (c) -1 (d) $\sqrt{3}$ (e) 3

Oppgåve 8. Kva for eit av uttrykka under er lik $\frac{e^{\ln(e^3)}}{e^{2\ln(e^{-3})}}$?

(a) e^9 (b) 2 (c) e^3 (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $\ln 6$

Oppgåve 9. Thorium-228, som vert brote ned eksponentielt, har halveringstid på 1,92 år. Om du starter med 10 kg av stoffet, etter om lag kor mange år er det 3 kg att?

(a) 3,988 (b) 4,273 (c) 3,434 (d) 3,335 (e) 2,879

Oppgåve 10. Finn $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-4x^2+7}{2x^2+3}$.

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) $-\frac{3}{2}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) 0

Oppgåve 11. Finn $\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x})$.

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ (c) $\frac{2}{x}$ (d) $\frac{\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ (e) $\frac{1}{2x}$

Oppgåve 12. Rekn ut integralet $\int x^2e^{x^3}\,dx$.

(a) $2xe^{x^3}+C$ (b) $e^{\frac{1}{4}x^4}+C$ (c) $\frac{1}{3}e^{x^3}+C$ (d) $3x^4e^{x^2}+C$ (e) $\frac{1}{3}e^{3x^2}+C$

Oppgåve	a	b	c	d	e
1			X		
2	X				
3			X		
4					X
5			X		
6				X	
7		X			
8	X				
9				X	
10		X			
11					X
12			X		

Studentnummer

Studieprogram

Inspektør