Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# MA0001 Brukerkurs A i Matematikk
vår 2009

**Løsningsforslag til eksamen**
**15.05.09**

$\boxed{1}$ Vi setter $y = e^{(x^3)}$ og løser denne likningen med hensyn på $x$:

$$\begin{aligned} y &= e^{(x^3)} \\ \ln y &= x^3 \\ x &= (\ln y)^{1/3} = \sqrt[3]{\ln y}. \end{aligned}$$

Den inverse funksjonen er derfor $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ for $x > 0$.

$\boxed{2}$ Siden radien vokser med konstant hastighet 2 m/døgn, er radien $r$ lik $r(t) = 2t$ meter etter $t$ døgn.

Arealet av $D(r)$ etter $t$ døgn ($t$ behøver ikke være et helt tall) er derfor

$$A = f(t) = \pi r(t)^2 = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2.$$

Vekstraten (endringsraten) til $A$ er gitt ved $v(t) = f'(t) = 8\pi t$ m$^2$/døgn. Denne varierer med $t$, og er altså ikke konstant.

Endringsraten $v(t)$ endrer seg med hastighet $v'(t) = 8\pi$ m$^2$/døgn$^2$.

$\boxed{3}$ For å finne ut hva slags logaritmisk plott det kan lønne seg å lage, utvider vi tabellen i oppgaven:

| Tidspunkt $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatur $T$ | 100° | 90.5° | 81.9° | 74.1° | 67.0° | 60.7° | 54.9° | 49.7° | 44.9° |
| $\ln t$ | $--$ | 0 | 0.69 | 1.10 | 1.39 | 1.61 | 1.79 | 1.95 | 2.08 |
| $\ln T$ | 4.61 | 4.51 | 4.41 | 4.31 | 4.20 | 4.11 | 4.01 | 3.91 | 3.80 |

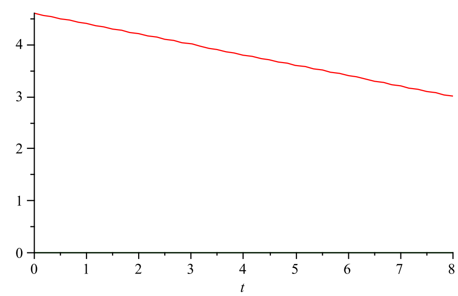
for å se om noen av de mulige plottene vil danne en rett linje (sånn omtrent). Her ser vi, faktisk uten å plotte, at $\ln T$ avtar lineært når $t$ vokser. Mer presist:

$$\ln T = 4.61 - 0.1t.$$

Det betyr at

$$T = e^{4.61-0.1t} = 100\,e^{-0.1t} \qquad \text{(sånn omtrent.)}$$

Likevel: det står i oppgaven at man skal lage et plott, så her er det:




**4** Funksjonen er kontinuerlig i origo hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \pi.$$

Vi har

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin 3x}$$

fordi vi bare trenger kontrollere funksjonsverdiene nær grensepunktet $x = 0$, og ikke i selve grensepunktet. Ved L'Hopitals regel gjelder

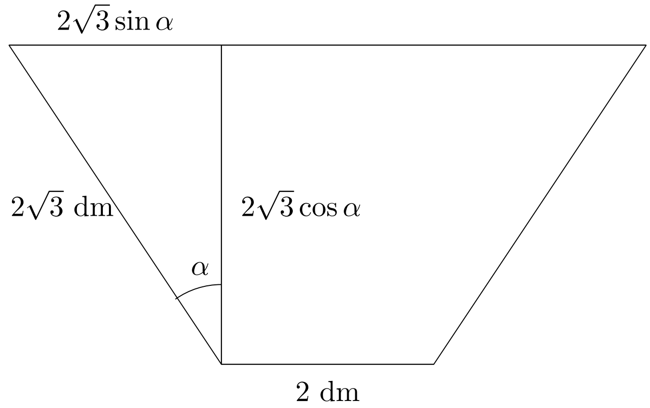
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{a \cos ax}{3 \cos 3x} = \frac{a}{3}.$$

Funksjonen $f(x)$ er derfor kontinuerlig i origo hvis og bare hvis $a/3 = \pi$, det vil si, $a = 3\pi$.

**5** Tverrsnittet har form som et trapes med grunnlinje 2 dm, høyde $2\sqrt{3}\cos\alpha$ og lengde i overkant $(2 + 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha)$. Arealet av tverrsnittet er derfor

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\Big(2 + (2 + 2\sqrt{3}\sin\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha)\Big) \cdot 2\sqrt{3}\cos\alpha \\ &= 4\sqrt{3}\cos\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha = F(\alpha). \end{aligned}$$

(Det kunne ha vært nevnt at tverrsnittet er symmetrisk om en vertikal akse, men vi valgte å utelate den opplysningen for å holde oppgaveteksten knapp. Studenter som ikke brukte en slik symmetri, vil få full score på oppgaven selv om de ikke kom i mål.)




For å maksimere $A$ undersøker vi fortegnet til $F'(\alpha)$ som er gitt ved

$$\begin{aligned}F'(\alpha) &= -4\sqrt{3}\sin\alpha + 12\cos^2\alpha - 12\sin^2\alpha\\ &= -4\sqrt{3}\sin\alpha + 12(1-\sin^2\alpha) - 12\sin^2\alpha\\ &= 12 - 4\sqrt{3}\sin\alpha - 24\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Vi ser først at $F'(\alpha) = 0$ for

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4(-24)12}}{-2\cdot 24}\\ &= \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 6\cdot 12}}{12} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{75}}{12}\\ &= \frac{-\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{12}.\end{aligned}$$

Det er klart at $\alpha$ må være en vinkel i intervallet $[0, \pi/2]$. Det vil si, $\sin\alpha \geq 0$. Altså er $F'(\alpha) = 0$ for

$$\sin\alpha = \frac{-\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En kvikk liten sjekk viser videre at $F'(\alpha) > 0$ for $\sin\alpha < \sqrt{3}/3$ og $F'(\alpha) < 0$ for $\sin\alpha > \sqrt{3}/3$. Altså har $F(\alpha)$ sin maksimale verdi når $\alpha$ er slik at $\sin\alpha = \sqrt{3}/3$, det vil si, for

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.6155.$$

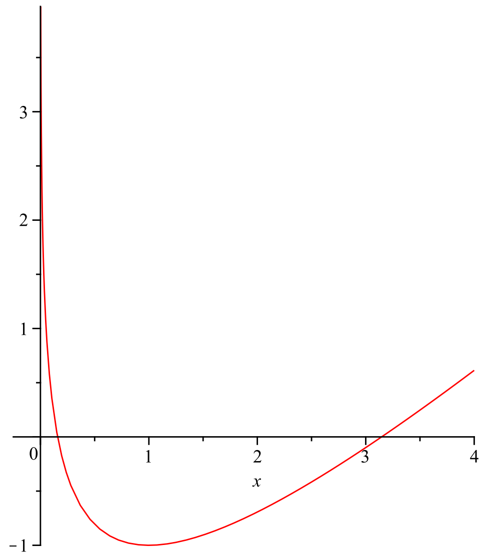
Det maksimale arealet er

$$\begin{aligned}A &= 4\sqrt{3}\cos\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha = 4\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\alpha} + 12\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ &= 4\sqrt{3}\sqrt{1-1/3} + 12\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1-1/3} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ **a)** La $f(x) = x - \ln x - 2$. Da er $x$ en løsning av likningen hvis og bare hvis $x$ er et nullpunkt for $f(x)$. Siden

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad \text{er} \quad \begin{cases} < 0 & \text{for } 0 < x < 1,\\ = 0 & \text{for } x = 1,\\ > 0 & \text{for } x > 1,\end{cases}$$

er $f(x)$ en avtagende funksjon for $0 < x < 1$ og en voksende funksjon for $x > 1$. Spesielt har den et minimum for $x = 1$, nemlig $f(1) = -1$. $f$ kan derfor høyst ha to nullpunkter, nemlig høyst ett i intervallet $(0, 1)$ og høyst ett i intervallet $(1, \infty)$. (Merk at $f(x)$ bare er definert for positive $x$.)




Siden $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$ og $f(1/10) = 0.4026\cdots > 0$, følger det av skjæringssetningen at $f$ har minst ett nullpunkt i intervallet $(1/10, 1)$. Altså har $f$ akkurat ett nullpunkt, $\tilde{x}$, i dette intervallet.

Siden $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$ og $f(4) = 0.6937\cdots > 0$, følger det av skjæringssetningen at $f$ har minst ett nullpunkt i intervallet $(1, 4)$. Altså har $f$ akkurat ett nullpunkt, $x^*$, også i dette intervallet.

Utenfor disse to intervallene kan $f$ ikke ha noen nullpunkter. Derfor har $f$ akkurat to nullpunkter.

**b)** Vi vet at denne løsningen $x^*$ ligger i intervallet $(1, 4)$, der $f(1) < 0$ og $f(4) > 0$.
Midtpunktet av dette intervallet er $\frac{1}{2}(1 + 4) = \frac{5}{2}$.
$f(5/2) = -0.41\cdots < 0$. Altså ligger $x^*$ i intervallet $(5/2, 4)$.
Midtpunktet av dette intervallet er $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} + 4) = \frac{13}{4}$.
$f(13/4) = 0.071\cdots > 0$. Altså ligger $x^*$ i intervallet $(5/2, 13/4)$.
Midtpunktet av dette intervallet er $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} + \frac{13}{4}) = \frac{23}{8}$.
Vi setter derfor løsningen $x^*$ til å være

$$x^* \approx \frac{23}{8} = 2.875.$$

Feilen er da mindre enn $|\frac{23}{8} - \frac{5}{2}| = |\frac{23}{8} - \frac{13}{4}| = \frac{3}{8} < 0.4$.

**c)** Vi lar for eksempel startverdien være verdien $x_0 = 2.875000$ som vi fant i b). Ved Newton-Raphsons metode får vi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 2 - \ln x_n}{1 - 1/x_n}$$

som gir

$$\begin{aligned} x_0 &= 2.875000 \\ x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 2 - \ln x_0}{1 - 1/x_0} &= 3.15261410 \\ x_2 = x_0 - \frac{x_1 - 2 - \ln x_1}{1 - 1/x_1} &= 3.14619626 \\ x_3 = x_0 - \frac{x_2 - 2 - \ln x_2}{1 - 1/x_2} &= 3.14619322 \end{aligned}$$

som viser at $x^* \approx 3.1462$ med den ønskede nøyaktigheten.

Alternativt kunne vi for eksempel ha startet med $x_0 = 3.2$, en verdi vi lett kan gjette fra figuren. Det gir

$$\begin{aligned} x_0 &= 3.20000000 \\ x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 2 - \ln x_0}{1 - 1/x_0} &= 3.14640118 \\ x_2 = x_0 - \frac{x_1 - 2 - \ln x_1}{1 - 1/x_1} &= 3.14619323 \\ x_3 = x_0 - \frac{x_2 - 2 - \ln x_2}{1 - 1/x_2} &= 3.14619322 \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Middelverdien til $T$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)dt = \frac{1}{24}\int_0^{24}\left(10 - 8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) + \frac{1}{8}\left(2 + \frac{t}{4}\right)^{1/3}\right)dt \\ &= \frac{1}{24}\left(10\int_0^{24} dt - 8\int_0^{24} 8\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)dt + \frac{1}{8}\int_0^{24}\left(2 + \frac{t}{4}\right)^{1/3} dt\right). \end{aligned}$$

Her er

$$\int_0^{24} dt = 24.$$

Ved bruk av substitusjonen $u = \pi t/12$ og derved $du = \pi dt/12$, er

$$\int_0^{24} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) dt = \int_{u=0}^{2\pi} \cos u \, \frac{12\,du}{\pi} = 0.$$

Ved bruk av substitusjonen $u = 2 + t/4$ og derved $du = dt/4$, er

$$\begin{aligned} \int_0^{24}\left(2 + \frac{t}{4}\right)^{1/3} dt &= \int_2^8 u^{1/3} 4\,du = \left[4\,\frac{u^{4/3}}{4/3}\right]_2^8 \\ &= 3(8^{4/3} - 2^{4/3}) = 3(2^4 - 2^{4/3}) = 3(16 - 2\sqrt[3]{2}). \end{aligned}$$

Middeltemperaturen er derfor

$$\overline{T} = \frac{1}{24}\left(240 + 0 + \frac{48 - 6\sqrt[3]{2}}{8}\right) = \frac{41}{4} - \frac{\sqrt[3]{2}}{32} \approx 10.21^\circ.$$