

Faglig kontakt under eksamen:
Haaken A. Moe
Tlf: 92650655



Bokmål

EKSAMEN I BRUKERKURS B I MATEMATIKK (MA0002)

Torsdag 06.12 2007
Tid: 09.00 – 13.00
Sensur 6. januar 2008

Hjelpemidler:
Alle trykte og skrevne, samt kalkulator.

Alle svar skal begrunnes!
Vis mellomregning, eller henvis til teori.

Oppgave 1 Leslie-matriser.

- a)** (10%) I en bestemt populasjon av mus antas ingen individer å leve mer enn tre år. Populasjonen deles opp i tre kategorier etter hvilket leveår individet er i.

Av individene i sitt første år (1. alderskategori) forventes 10% å få i gjennomsnitt 6 avkom hver. Av individene i sitt andre år forventes halvparten å få i gjennomsnitt 6 avkom, mens de i sitt tredje år får 1 avkom pr 2 individer. For både individer i sitt første år og individer i sitt andre år forventes 80% prosent å overleve til neste alderskategori. Sett opp en Leslie-matrise som beskriver denne populasjonens utvikling.

- b) (10%) Start i 'år 0' med en populasjon bestående av 100 individer med alder 0-1 år (i første aldersklasse), og ingen eldre individer. Regn ut hvordan denne populasjonen utvikler seg år for år de første 4 årene.

Oppgave 2 Matriser og lineære ligningssystemer.

- a) (10%) Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

- b) (10%) Gitt ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x + 2y &= \beta + 1 \\ 5x + (2 + \alpha)y &= 3. \end{aligned}$$

For hvilke verdier eller kombinasjoner av verdier (reelle tall) av α og β har systemet henholdsvis en, ingen og uendelig mange løsninger?

Oppgave 3 En krabbe kryper bortover sandbunnen av et akvarium fylt med vann. Sandbunnen er ikke flat, den er en flate beskrevet av ligningen

$$f(x, y) = 10 - x^2y^2,$$

hvor $-1 \leq x \leq 1$ og $-1 \leq y \leq 1$.

- a) (10%) Finn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.
- b) (10%) Finn de kritiske punktene til f , og avgjør i hvilke(t) punkt(er) krabben er nærmest vannets overflate.
- c) (10%) Beskriv tangentplanet til punktet/punktene du fant i oppgave c). Hint: Dette er veldig enkelt.
- d) (10%) Hvis krabben står i punktet $(1/3, 1/4)$, hvilken vei skal den bevege seg for å gå fortest mulig oppover? (Vi antar at hastigheten til krabben er den samme uansett helning på underlaget).

Oppgave 4 a) (10%) Finn de to egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

- b) (10%) Løs det følgende systemet av differensialligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_1, \end{aligned}$$

slik at ligningene tilfredsstiller $x_1(0) = 1$ og $x_2(0) = 1$. Her er $x_1 = x_1(t)$ og $x_2 = x_2(t)$ to ligninger av variabelen t .