



## LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA0002, VÅR 07

### Oppgave 1 Matriser:

- a) Finn de to egenverdiene til matrisen  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ , og finn en egenvektor til hver av disse egenverdiene.

**Svar:** Vi setter opp determinantligningen, og får:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 5 & -3 - \lambda \end{vmatrix} &= (4 - \lambda)(-3 - \lambda) - (5)(-2) \\ &= -12 - \lambda + \lambda^2 + 10 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Som betyr at  $A$  har egenverdier  $\lambda_1 = -1$  og  $\lambda_2 = 2$ . Finner mulige egenvektorer via  $(A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0}$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0} &\quad \Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 : \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0} &\quad \Rightarrow \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) Regn ut  $A^{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

**Svar:** Denne oppgave kan løses på flere måter. En kan selvfølgelig gange  $A$  med seg selv 20 ganger, eller en kan sette opp matrisen  $P$  av egenvektorene fra oppgave a), og finne  $A = P^{-1}DP$ . Det enkleste er å observere at  $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$ . Dette gir det følgende:

$$\begin{aligned} A^{20} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} &= A^{20}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = A^{20}\underline{v}_1 + A^{20}\underline{v}_2 = (\lambda_1)^{20}\underline{v}_1 + (\lambda_2)^{20}\underline{v}_2 \\ &= (-1)^{20} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2^{20} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2^{20} \\ 5 + 2^{20} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Oppgave 2** Differensial-ligninger :

- a) Løs initialverdiproblemet  $\frac{dy}{dx} = x^2$ , når  $y(3) = 5$ .

**Svar:** Denne ligningen er separabel,  $dy = x^2 dx$ , og integrer vi venstre side mhp  $y$  og høyre side mhp  $x$  så får vi

$$y = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Initialbetingelsene gir nå at  $y(3) = \frac{1}{3}3^3 + c = 9 + c = 5$ , som gir at  $c = -4$ .

- b) Finn likevektspunktet/ene til ligningen i a). Er punktet/ene du fant stabile eller ustabile?

**Svar:** Likevektspunkter er når  $\frac{dy}{dx} = 0$ , dvs når  $x^2 = 0$ , som gir at  $x = 0$ . Den deriverte av  $x^2$  i 0 gir ingen svar, siden denne også er null. Men  $\frac{dy}{dx}$  er positiv for alle  $x \neq 0$ , som betyr at hvis  $x$  blir positiv, så blir den deriverte av  $y(x)$  positiv. Dvs at hvis  $x$  blir større enn null, så fortsetter  $y(x)$  å øke i verdi, og forsvinne unna punktet  $x = 0$ . Så  $x = 0$  er ikke stabilt, som er definisjonen på ustabilit, så punktet er ustabilit.

- c) Løs initialverdiproblemet  $t \frac{dx}{dt} = 2x + t^3 e^t$ , når  $x(0) = -1$ .

**Svar:** (NB: Her er det en feil i initialbetingelsene, de er ikke mulige å oppfylle. Feil utgave av eksamen sendt til eksamenskontoret...) Ligningen er lineært separabel:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = t^2 e^t.$$

Vi finner integrerende faktor, og starter med å integrere  $-\frac{2}{t}$ , som blir  $-2 \ln t$ . Den integrerende faktoren blir da  $e^{-2 \ln t}$ . Merk nå at

$$e^{-2 \ln t} = e^{-\ln t} e^{-\ln t} = \frac{1}{e^{\ln t}} \frac{1}{e^{\ln t}} = \frac{1}{t^2}.$$

Ligningen blir nå

$$\frac{1}{t^2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{t^2} \frac{2}{t} x = \frac{1}{t^2} t^2 e^t,$$

som forkorter til

$$\frac{1}{t^2} \frac{dx}{dt} - \frac{2}{t^3} x = e^t.$$

Integrasjon mhp  $t$  gir nå

$$\frac{1}{t^2} x = e^t + c,$$

som tilslutt gir

$$x(t) = t^2(e^t + c),$$

som ansees som fullgodt svar på oppgaven.

**Oppgave 3** I denne oppgaven studerer vi funksjonen

$$f(x, y) = 2(x + y^2) - x^3$$

a) Finn  $\nabla f$ , dvs gradienten til  $f$ .

**Svar:** Dette blir kort og godt  $\nabla f = \begin{bmatrix} 2 - 3x^2 \\ 4y \end{bmatrix}$ .

b) Finn de kritiske punktene til  $f$ .

**Svar:** De kritiske punktene er der  $\nabla f = \underline{0}$ . Dette medfører at  $y = 0$  og at  $2 = 3x^2$ , eller at  $\frac{2}{3} = x^2$ . De to kritiske punktene blir da  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$  og  $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ .

c) Gitt den parametriserte linjen  $l(t)$

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -3t + 1, \end{aligned}$$

hvor  $-3 \leq t \leq 3$ . Dette betyr at linjen går fra og med punktet  $(-6, 10)$  til og med punktet  $(6, -8)$ . Hva er det absolutte maksimum og absolutte minimum  $f$  oppnår på punktene på denne linjen?

**Svar:** Vi starter med å benytte ligningene som parametriserer linja til å lage en funksjon  $g(t)$  som er  $f$  begrenset til punktene på linja. Denne fåes ved å bytte  $x$  og  $y$  med ligningene i oppgaven, og blir

$$\begin{aligned} g(t) &= 2(2t + (-3t + 1)^2) - (2t)^3 \\ &= 4t + 18t^2 - 12t + 2 - 8t^3 = -8t^3 + 18t^2 - 8t + 2. \end{aligned}$$

Vi vil nå finne absolutte maks og min til denne funksjonen, når  $-3 \leq t \leq 3$ . Vi vil derfor undersøke de kritiske punktene. For å få til dette deriverer vi først  $g(t)$ , som gir

$$g'(t) = -24t^2 + 36t - 8.$$

Dette er en andregradsligning som (benytt formel) er null når  $t = \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{12}$ , dvs  $t \approx 1.229$  eller  $t \approx 0.271$ . Det er disse to  $t$  verdiene, samt  $t = 3$  og  $t = -3$  som må sammenlignes. Vi får:

$$\begin{aligned} t = -3 & : g(-3) = 404, \text{ abs max} \\ t \approx 0.271 & : g(0.271) \approx 0.995 \\ t \approx 1.229 & : g(1.229) \approx 4.5 \\ t = 3 & : g(3) = -76, \text{ abs min.} \end{aligned}$$

- d) Hva er den retningsderiverte til  $f$  langs vektoren  $\underline{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ , i punktet hvor linjen fra c) skjærer linjen gitt av  $x = y$ ?

**Svar:** Det første som må gjøres er å finne punktet, og dette kan f.eks gjøres ved å finne  $t$  slik at  $2t = -3t + 1$ , dvs der  $5t = 1$ . Dette er punktet  $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ , som er det eneste punktet som oppfyller kravet om at det ligger på linjen  $l$  og oppfyller  $x = y$ .

For å kunne finne den retningsderiverte må vi normalisere vektoren  $\underline{u}$ , og da må vi først finne lengden på  $\underline{u}$ ,  $|\underline{u}|$ :

$$|\underline{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Den retningsderiverte er nå skalarproduktet av gradienten i punktet og den normaliserte  $\underline{u}$ :

$$\begin{aligned} \nabla f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 - \frac{12}{25} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \left( \left(2 - \frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{196}{25} \end{aligned}$$

- e) Finn en ligning som beskriver tangentplanet til  $f$  i punktet  $(1,1)$ .

**Svar:** Punktet  $(1,1)$  angir plasseringen til planet i forhold til  $x$  og  $y$  verdiene.  $f(1,1) = 2(1+1) - 1 = 3$ , så planet skal gå gjennom  $(1,1,3)$  i tre dimensjoner. Det eneste som nå behøves er gradienten i dette punktet

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 - 3 \cdot 1^2 \\ 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Setter vi dette inn i formelen for tangentplan, så får vi  $z - 3 = -1 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 1)$  som forkortet blir

$$z = 4y - x,$$

og planet består av alle punkter som oppfyller dette kravet.