Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

FASIT/LF MIDTSEMESTEREKSAMEN MA0002, V08

Oppgave 1 Vis at funksjonen $y(x) = x^{-2} \ln x$ er en løsning på differensialligningen

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{x}.$$

Løsning: Vi deriverer $y(x) = x^{-2} \ln x$ mht til x, og setter dette inn i diffligningen. Hvis dette da oppfyller ligningen er den gitte funksjonen en løsning.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-2} \ln x) = -2x^{-3} \ln x + x^{-2}x^{-1} = -2x^{-3} \ln x + x^{-3}.$$

Setter dette inn i diffligningen:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy &= x^2(-2x^{-3} \ln x + x^{-3}) + 2x(x^{-2} \ln x) \\ &= -2x^{-1} \ln x + x^{-1} + 2x^{-1} \ln x \\ &= x^{-1} \end{aligned}$$

Vi ser av utregningen at $y(x) = x^{-2} \ln x$ løser diffligningen.

Oppgave 2 Finn løsning på initialverdiproblemet, dvs finn ligning $y(x)$, gitt ved den separable differensialligningen

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 3,$$

og at $y(2) = 13$.

Løsning: Ligningen er separabel, og separeres til

$$dy = 3x^2 dx.$$

Vi integrerer venstre side mht y og høyre side mht x, og får

$$y = x^3 + C.$$

Initialbetingelsen sier at

$$y(2) = 2^3 + C = 8 + C = 13$$

som betyr at $C = 5$, som gir at løsningen på initialverdiproblemet er

$$y(x) = x^3 + 5.$$

Oppgave 3 Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{dx}{dt} = kx + 2x + a.$$

Løsning: Dette er en lineær førsteordens diffligning, som kan stilles opp på dette viset:

$$\frac{dx}{dt} - (k+2)x = a.$$

Vi har at $\int -(k+2)dt = -(k+2)t$ som gir integrerende faktor $e^{-(k+2)t}$. Multipliserer vi inn denne får vi

$$e^{-(k+2)t}\frac{dx}{dt} - e^{-(k+2)t}(k+2)x = e^{-(k+2)t}a,$$

som, integrert mht t gir

$$e^{-(k+2)t}x = -\frac{1}{k+2}e^{-(k+2)t}a + C.$$

Multipliserer med $e^{(k+2)t}$ for å få x alene på venstre side, stokker om litt på høyre side, og forkorter:

$$x = Ce^{(k+2)t} - \frac{a}{k+2},$$

som er den generelle løsningen av diffligningen.

Oppgave 4 Vi ser på matrisen $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Vis at A har egenverdiene 4 og -1, og finn en egenvektor til hver av de to egenverdiene til A.
Løsning: A har determinantligning

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Hvis vi setter inn 4 og -1 for λ er ligningen oppfyllt. 4 og -1 er derfor egenverdier for A. Vi finner egenvektorer, først for $\lambda = -1$. En egenvektor til egenverdien 4 er en løsning på

$$(A - 4I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

det vil si en hvilken som helst x og y slik at $x = 3y$, for eksempel $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tilsvarende for egenverdien -1 så blir det

$$(A + I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir at x og y skal ha forholdet $x = 2y$, så en mulig egenvektor er $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Skriv vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ som en sum av de to egenvektorene du fant i foregående punkt.
Løsning: Vi vil finne a og b slik at

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Dette kan skrives på denne forkortede formen, som vi utfører Gauss-eliminasjon på:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 2 & 1 & | & -13 \end{bmatrix} -2\cdot \text{ øvre adderes til nedre}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & -15 \end{bmatrix} \text{nedre} \cdot \frac{-1}{5}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} -3\cdot \text{ nedre legges til øvre}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -8 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at

$$-8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

c) Hva er determinanten til A?
Løsning: Det er bare å regne det ut, vi har

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - (-3 \cdot 2) = -10 + 6 = -4.$$

d) Hvor mange løsninger har det følgende ligningssystemet?

$$5x - 3y = 8$$
$$2x - 2y = 3$$

Løsning: Dette ligningssystemet kan skrives $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vi fant i forrige delpunkt at A har determinant $\neq 0$, som betyr at ligningsystemet har nøyaktig en løsning (uansett hva som står til høyre for de to likhetstegnene).

e) Finn A^{-1}.
Løsning: Vi regner det ut (skriver ikke ned operasjonene denne gangen):

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & | & 1 & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -2 \\ 2 & -2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -2 \\ 0 & -4 & | & -2 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -2 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

Dette betyr at $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$.

Oppgave 5 Vi ser på vektoren $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ i planet.

a) Det finnes en linje som går gjennom punktet (1,1) og som er vinkelrett på vektoren $\underline{x}$. Lag en ligning som uttrykker denne linja.

Løsning: Hvis $P_0 = (1,1)$, så vil denne linja bestå av alle punkter $P = (x,y)$ som ligger slik at vektoren $\overrightarrow{PP_0}$ er ortogonal med $\underline{x}$, dvs at skalarproduktet $\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{x}$ er lik null. Dette gir ligningen

$$\overrightarrow{PP_0} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = 0.$$

Skriver vi ut dette skalarproduktet så får vi

$$3(x-1) - 4(y-1) = 3x - 4y + 1 = 0$$

så linja består av alle par av x og y som løser ligningen $3x - 4y = 1$.(NB: denne ligningen beskriver et bestemt forhold i størrelse mellom x og y. Det finnes uendelig mange andre ligninger som angir det samme størrelsesforholdet, og de beskriver samme linja. Dette er samme type situasjon som med å finne egenvektorer.)

b) Det finnes også en linje som er parallell med $\underline{x}$ gjennom punktet (1,1). Lag en ligning som uttrykker denne linja i *variablene x og y*.

Løsning: Det finnes flere måter å gjøre dette på. En av disse er å finne en vektor som er ortogonal med $\underline{x}$. En mulig slik vektor er $\underline{x}^{\perp} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Nå er $\underline{x} \cdot \underline{x}^{\perp} = 0$. Linja vi søker vil nå være vinkelrett på $\underline{x}^{\perp}$ og vi kan benytte akkurat samme framgangsmåte som foregående punkt bare med $\underline{x}^{\perp}$ i stedet for $\underline{x}$. Regner vi ut dette får vi at linja består av alle par av x og y som oppfyller ligninga $3y + 4x = 7$.