Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA0002, V08

Oppgave 1 Litt av hvert.

a) (10%) Løs initialverdiproblemet gitt ved differensialligningen

$$t\frac{dx}{dt} - t^3 = 3t^3,$$

med initialbetingelsen $x(0) = 3$.

Løsning: Ligningen er separabel, og kan skrives (del på t og få alle $t$ene over på høyre side):

$$\frac{dx}{dt} = 4t^2$$

Med $g(x) = 1$ og $h(t) = 4t^2$ blir dette

$$dx = 4t^2 dt$$

som integrer til

$$x(t) = \frac{4}{3}t^3 + C.$$

Initialbetingelsen krever at $x(0) = \frac{4}{3}0^3 + C = 3$, dvs at $C = 3$, som gir løsning

$$x(t) = \frac{4}{3}t^3 + 3.$$

b) (10%) Regn ut den inverse matrisen, dvs A^{-1}, til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Løsning: Det er bare å regne i vei:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{4}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{13}{6} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Den høyre halvdelen av den siste matrisen er A^{-1}.

c) (10%)Regn ut determinanten til matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Løsning: Vi benytter regnereglene for determinanter to ganger før vi benytter formel for determinant av 3x3-matriser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 4 - 0 \cdot 3) = -12.$$

Oppgave 2 (10%) La $x(t)$ være en funksjon som angir antallet levende bakterier i som befinner seg i et akvarium ved tiden t. Akvariet inneholder 100 liter væske og er helt fullt. Overskytende væske renner ut av akvariet. Vi antar at de levende bakteriene i akvariet alltid er helt jevnt fordelt i væsken.

Det tilføres 10 liter væske i timen til akvariet, denne væsken inneholder 10^6 levende bakterier per liter. De levende bakteriene formerer seg, hver time deler halvparten av dem seg i to. Bakteriene antas å leve i 5 timer.

Du skal nå *sette opp en differensialligning for* $\frac{dx}{dt}$, dvs en ligning som viser hvordan $x(t)$ endrer seg når tiden går.

Løsning: Vi ser på dette med timer som tidsenhet (spiller ingen rolle hvilken enhet vi bruker, bare vi bruker den samme hele tiden!). Det står at det tilføres 10 liter veske med 10^6 bakterier pr liter i timen, så tilsammen så økes $x(t)$ med 10^7 bakterier i timen på dette viset. I tillegg deler halvparten seg i to hver time, som blir en økning på $\frac{x(t)}{2}$ bakterier pr time.

Bakteriene lever i 5 timer, som betyr at en femdel dør pr time, dvs det forsvinner $\frac{x(t)}{5}$ bakterier pr time. I tillegg renner det væske ut av akvariet, en tiendedel av væsken pr time. Denne tiendedelen inneholder $\frac{x(t)}{10}$ av bakteriene siden de antas å alltid være helt jevnt fordelt i væsken. Dette gir

$$\frac{dx}{dt} = 10^7 + \frac{x(t)}{2} - \frac{x(t)}{5} - \frac{x(t)}{10} = 10^7 + \frac{x(t)}{5}.$$

Oppgave 3 Vi ser på funksjonen $f(x, y, z) = e^{xy}z^2 + \frac{1}{z^2 x}$.

a) (10%) Finn gradienten til f, dvs ∇f. Finn også den retningsderiverte til f i retningen $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ fra punktet $(1, 0, 2)$.

Løsning: Deriverer vi får vi at

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ye^{xy}z^2 - \frac{1}{z^2x^2} \\ xe^{xy}z^2 \\ 2ze^{xy} - \frac{2}{z^3x} \end{bmatrix}$$

Den retningsderiverte i retning $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \overline{v}$ fra punktet $(1,0,2)$ får vi nå ved å finne skalarproduktet $\nabla f(1{,}0{,}2) \cdot \overline{v}$ og dele dette på lengden av $\overline{v}$. Lengden av denne vektoren er $\sqrt{-1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = 3$. Den retningsderiverte blir da

$$\nabla f(1{,}0{,}2) \cdot \frac{1}{3}\overline{v} = \begin{bmatrix} 0 \cdot e^0 \cdot 2^2 - \frac{1}{2^2 \cdot 1^2} \\ e^0 \cdot 2^2 \\ 2 \cdot 2e^0 - \frac{2}{2^3} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3}\overline{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 4 \\ \frac{15}{4} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\frac{1}{4} + 8 + \frac{15}{2}) = \frac{21}{4}.$$

b) (10%)Finn den lineære approksimasjonen $\widehat{f}(x,y,z)$ av $f(x,y,z)$ i punktet $(1{,}1{,}2)$. Regn ut $\widehat{f}(2{,}2{,}1)$.

Løsning: Den lineære approksimasjonen i $(1{,}1{,}2)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \widehat{f}(1{,}1{,}2) &= f(1{,}1{,}2) + f_x(1{,}1{,}2)(x-1) + f_y(1{,}1{,}2)(y-1) + f_z(1{,}1{,}2)(z-2) \\ &= 4e + \frac{1}{4} + (4e - \frac{1}{4})(x-1) + 4e(y-1) + (4e - \frac{1}{4})(z-2) \\ &= 4e(x+y+z) - \frac{1}{4}(x+z) - 12e + 1 \end{aligned}$$

Helt greit om en regner om dette til et uttrykk uten e, og helt greit om en lar e bli stående. Vi finner $\widehat{f}(2{,}2{,}1)$:

$$\widehat{f}(2{,}2{,}1) = 4e(2+2+1) - \frac{1}{4}(1+2) - 12e + 1 = 8e + \frac{1}{4} \approx 21{,}996.$$

Oppgave 4 (10%) En Leslie-matrise er gitt ved $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 3 & 1 \\ 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}55 & 0 \end{bmatrix}$. Forklar hva tallene og størrelsen på matrisen betyr.

Løsning: Størrelsen på matrisen betyr at vi ser på en modell med 3 alderskategorier. Tallene i øverste rad betyr, fra venstre mot høyre, at individene i 1. alderskategori får 0,5 barn hver i snitt, at individene i 2. alderskategori får 3 barn hver i snitt og at individene i 3. alderskategori i snitt får 1 barn hver.

0,9 betyr at 90% av individene i 1. alderskategori overlever til 2. alderskategori, og 0,55 betyr at 55% av individene i 2. alderskategori overlever til 3. alderskategori.

Oppgave 5 (10%)Finn globale maxima og minima for funksjonen

$$f(x,y) = xy - x - y + 3$$

over det triangelformede området R i xy-planet som er avgrenset av punktene $(0{,}0)$, $(2{,}0)$ og $(0{,}4)$.

Løsning: Finner først gradienten til f:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} y-1 \\ x-1 \end{bmatrix}$$

Denne gradienten viser at f har ett kritisk punkt, når $(x,y) = (1,1)$. Videre må vi undersøke randen av R. R er avgrenset av linjene $x = 0$ for $0 \leq y \leq 4$, $y = 0$ for $0 \leq x \leq 2$ og $4 - 2x = y$ for $0 \leq x \leq 2$ og/eller $0 \leq y \leq 4$. Disse tre linjene gir ligningene

$$\begin{aligned} f(0,y) &= -y + 3 \\ f(x,0) &= -x + 3 \\ f(x, 4-2x) &= -2x^2 + 3x - 1. \end{aligned}$$

Deriverer vi disse (for å se etter kritiske punkt) så får vi

$$\begin{aligned} f'(0,y) = f'(x,0) &= -1 \\ f'(x, 4-2x) &= -4x + 5. \end{aligned}$$

De to første har mao ingen kritiske punkt, den siste har ett, for $x = \frac{5}{4}$, som gir paret $(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$. For å finne globale max og min må vi nå sammenligne verdiene av disse to kritiske punktene vi har funnet, og de tre punktene som angir R, $(0,0)$, $(2,0)$ og $(0,4)$. Vi finner da at global max er i $(0,0)$, hvor $f(0,0) = 3$, og global min er i $(0,4)$ hvor $f(0,4) = -1$.

Oppgave 6 Vi ser på et inhomogent system av lineære førsteordens diffligninger:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -3x_1 - 2x_2 - 3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 4x_2 - 9, \end{aligned}$$

a) (10%) Finn likevektspunktet til systemet.

Løsning: Før vi starter definerer vi

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Systemet kan da skrives

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A\underline{x} + \underline{b}.$$

Et likevektspunkt for systemet er nå verdier for $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \underline{x}'$ slik at

$$A\underline{x}' + \underline{b} = \underline{0}.$$

Likevektspunktet $\underline{x}'$ finnes ved å løse ligningssystemet over, dette gir $\underline{x}' = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

b) (10%) Løs systemet.

Løsning: Da vi løste $A\underline{x}' + \underline{b} = \underline{0}$, som er det samme som å løse $A\underline{x}' = -\underline{b}$ så fant vi en unik løsning. Dette betyr at A er invertibel, så A^{-1} finnes, og likevektspunktet vi fant over oppfyller $\underline{x}' = -A^{-1}\underline{b}$. Setter vi dette sammen får vi

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} + A^{-1}\underline{b}) = \frac{d\underline{x}}{dt} = A(\underline{x} + A^{-1}\underline{b}).$$

Den første likheten holder siden $A^{-1}\underline{b}$ bare er tall, og forsvinner under derivasjon. Den andre likeheten holder siden A og A^{-1} kansellerer hverandre. Vi kan med andre ord løse systemet

$$\frac{d}{dt}(\underline{x} + A^{-1}\underline{b}) = A(\underline{x} + A^{-1}\underline{b})$$

i stedet, og dette systemet er et homogent system vi uten videre kan løse. A har egenverdier 3 og -2, med mulige egenvektorer hhv $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Dette gir at systemet for $\underline{x} + A^{-1}\underline{b}$ har løsning

$$\underline{x}(t) + A^{-1}\underline{b} = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

som igjen betyr, siden $-A^{-1}\underline{b} = \underline{x}'$ at løsningen for $\underline{x}(t)$ er

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$