Trigonometriske funksjoner (notat til MA0003)

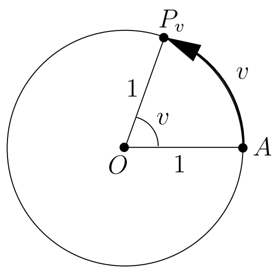
10. mars 2005

Radianer

Gitt et punkt A på en sirkel med radius 1 og sentrum O. La punktet P_v flytte seg fra punktet A slik at det beveger seg langs en sirkelbue av lengde v. Se figur 1. Da sier vi at vinkelen $\angle AOP_v$ er en vinkel på v *radianer*. Altså:

$$\angle AOP_v = v \text{ radianer.}$$

Vi kan gjerne si: "En vinkel på v radianer er vinkelen som skjærer ut en bue av



Figur 1: Radianer

lengde v på en sirkel med radius 1."

Hvis P_v beveger seg en hel gang rundt sirkelen svarer det til en vinkel på 360°. Hele omkretsen av sirkelen har en lengde på 2π, så 2π radianer svarer til 360°. Altså:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianer,} \quad \text{eller} \quad 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ radianer.}$$

Eksempel

Uttrykk 45° i radianer.

Løsning: $45° = 45 \cdot 1° = 45 \cdot \frac{2\pi}{360}$ radianer. Derfor er

$$45° = \frac{90}{360}\pi \text{ radianer} = \frac{\pi}{4} \text{ radianer.}$$

□

Eksempel

Hvor mange grader tilsvarer en vinkel på $\frac{\pi}{3}$ radianer?

Løsning: $360° = 2\pi$ radianer, så

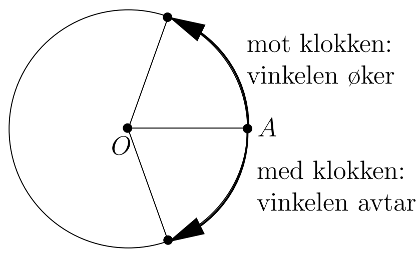
$$1 \text{ radian} = \frac{360°}{2\pi}.$$

Da er

$$\frac{\pi}{3} \text{ radianer} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{360°}{2\pi} = 60°.$$

□

Vi kommer til å bruke positive og negative vinkler. En positiv vinkel v svarer til at vi beveger oss mot klokken i figur 1. En negativ vinkel får vi om vi beveger oss med klokken. Se figur 2.



Figur 2: Positive og negative vinkler

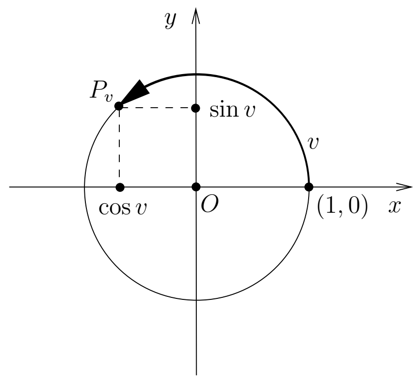
Sinus og cosinus: funksjonene $\sin x$ og $\cos x$

Vi ser på en sirkel i et koordinatsystem, med radius 1 og med sentrum i origo. Sett nå at punktet P_v flytter seg fra punktet $(1, 0)$ langs en sirkelbue av lengde v. Se figur 3. P_v har koordinatene (x, y):

$$P_v = (x, y).$$

Annenkoordinaten (y-koordinaten) til P_v kalles for *sinus* til tallet v. Vi skriver:

$$y = \sin v.$$



Figur 3: Sinus og cosinus

Førstekoordinaten (x-koordinaten) til P_v kalles for *cosinus* til v:

$$x = \cos v.$$

Dermed er

$$P_v = (\cos v, \sin v).$$

Eksempel

Vi finner sinus og cosinus til $v = \frac{\pi}{2}$ radianer.

Løsning: $v = \frac{\pi}{2}$ radianer svarer til en vinkel på $90°$, en rett vinkel. Dermed ligger $P_{\frac{\pi}{2}}$ på y-aksen, i punktet $(0,1)$. Derfor er

$$P_{\frac{\pi}{2}} = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1),$$

og

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

□

Siden $(\cos v, \sin v)$ er et punkt på sirkelen med radius 1 om origo, ser vi at

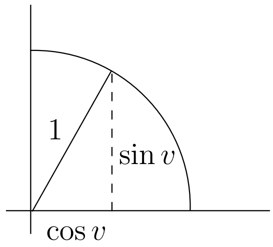
$$-1 \leq \cos v \leq 1$$

$$-1 \leq \sin v \leq 1$$

uansett hvilken vinkel v vi velger. Her er en annen viktig ting. Sinus og cosinus er *katetene* i en rettvinklet trekant med hypotenus lik 1. Ved å bruke Pytagoras' setning får vi:

$$(\cos v)^2 + (\sin v)^2 = 1^2 = 1.$$

Se figur 4.



Figur 4: Hypotenusen er 1

Periodisitet

En funksjon f er *periodisk* med periode T dersom

$$f(x) = f(x+T)$$

for hver x.

Sett at punktet P_v i figur 3 flytter seg en hel gang rundt sirkelen, slik at det kommer tilbake til utgangspunktet. Selv om radiantallet øker med 2π, er punktet det samme:

$$P_v = P_{v+2\pi}.$$

Da er også koordinatene de samme, slik at

$$(\cos v, \sin v) = (\cos(v+2\pi), \sin(v+2\pi)).$$

Dermed får vi:

$$\sin v = \sin(v+2\pi)$$
$$\cos v = \cos(v+2\pi).$$

Det betyr at $\sin v$ og $\cos v$ begge er periodiske funksjoner med periode 2π.

Vi kan gå rundt sirkelen - med eller mot klokken - så mange hele omdreininger vil vi: vi ender uansett opp der vi startet. Derfor er

$$\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$$

$$\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi)$$

for alle hele tall ("omdreininger") $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$.

Eksempel

Finn $\sin(\frac{5\pi}{2})$ og $\cos(\frac{5\pi}{2})$.

Løsning: Ovenfor så vi at $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Siden $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ får vi, ved å huske på at sin og cos er periodiske med periode 2π,

$$\sin(\frac{5\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\cos(\frac{5\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

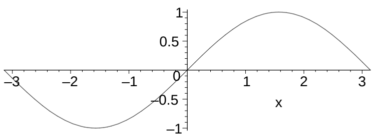
$\square$

Grafene til $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$

(NB: her bruker vi x som variabel i stedet for v!)

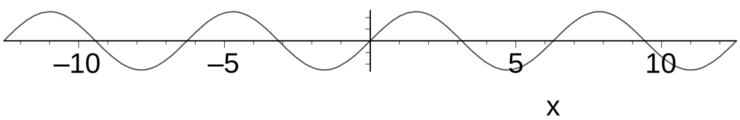
For å tegne grafen til $f(x) = \sin x$ lager vi en verditabell. Husk å sette kalkulatoren til *radianer*, ellers går det galt!

x	$\sin x$
$-\pi$	0
$-3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
$-\pi/2$	-1
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
π	0



Figur 5: Grafen til $f(x) = \sin x$

Hvis vi vil vite hvordan denne grafen blir for flere x-verdier trenger vi ikke å regne ut funksjonsverdiene. Vi vet jo at $f(x) = \sin x$ er periodisk, så vi kan bare "kopiere" grafen inn bortover x-aksen så mange ganger vi vil.

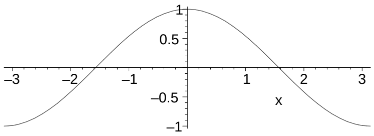


Figur 6: Grafen til $f(x) = \sin x$ i et litt større intervall

På samme måte som for $\sin x$ kan vi lage en verditabell for $g(x) = \cos(x)$:

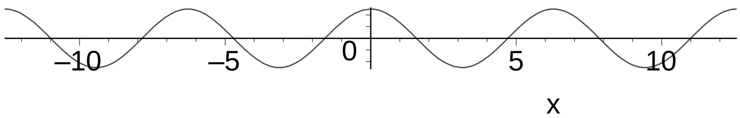
x	$\cos x$
$-\pi$	-1
$-3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
$-\pi/2$	0
$-\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2 \approx 0,707$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \approx -0,707$
π	-1

Grafen til $g(x) = \cos x$ kan du finne i figur 7. Funksjonen $g(x) = \cos x$ er også



Figur 7: Grafen til $g(x) = \cos x$

periodisk, så igjen er det lett å tegne grafen for flere x-verdier. Se figur 8.



Figur 8: Grafen til $f(x) = \cos x$ i et litt større intervall

Tangens

Tangens til x defineres som

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

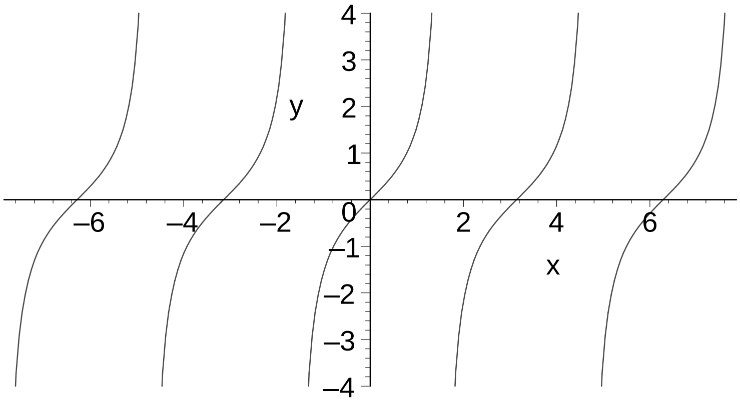
Funksjonen $\tan x$ er ikke definert der $\cos x = 0$. Den er altså ikke definert for

$$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots.$$

Tangens er en periodisk funksjon med periode π:

$$\tan x = \tan(x + \pi).$$

Linjene $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$ er *asymptoter* for $\tan x$. Se figur 9.



Figur 9: Grafen til $f(x) = \tan x$ i intervallet $(-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$

Oppgaver

Oppgave 1

Regn om 30° til radianer.

Oppgave 2

Regn om 135° til radianer.

Oppgave 3

Finn vinkelen som svarer til $\pi/6$ radianer.

Oppgave 4

Finn vinkelen som svarer til $7\pi/8$ radianer.

Oppgave 5

Finn verdiene av $\sin(3\pi/2)$ og $\cos(3\pi/2)$. Finn deretter verdiene av $\sin(7\pi/2)$ og $\cos(7\pi/2)$.

Oppgave 6

Hvis vi vet at $\sin(\pi/6) = 1/2$, hva blir da $\cos(\pi/6)$? (Hint: bruk at $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.)

Oppgave 7

Hvis vi vet at $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, hva blir da $\sin(\pi/4)$? (Samme hint som i oppgave 6.)

Oppgave 8

Finn $\tan 0$, $\tan(\pi/6)$ og $\tan(\pi/4)$. (Bruk svarene fra 6 og 7.)