Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen i MA0003:
Brukerkurs i matematikk for informatikere

Tirsdag 13. desember 2011

LØSNINGSFORSLAG

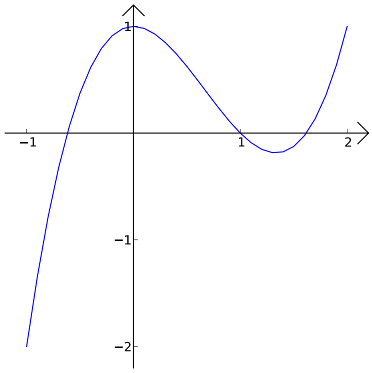
Oppgave 1

a) Den deriverte av f er
$$f'(x) = 3x^2 - 4x.$$
Likningen til tangentlinjen i punktet $(1, 0)$ må være på formen
$$y = ax + b,$$
der a og b er tall. Tallet a er stigninstallet til $f(x)$ ved $x = 1$, altså
$$f'(1) = -1.$$
Vi har dermed at likningen er
$$y = -x + b,$$
og vi må finne hva b er. Siden linjen går gjennom punktet $(1, 0)$, kan vi sette inn $x = 1$ og $y = 0$:
$$0 = -1 + b.$$
Dette gir $b = 1$. Likningen for tangenten er altså
$$y = -x + 1.$$

b) Vi finner nullpunktene til f' ved å løse likningen $f'(x) = 0$:
$$3x^2 - 4x = 0$$
$$(3x - 4)x = 0$$
Dette gir $3x - 4 = 0$ eller $x = 0$, så nullpunktene til f' er $\frac{4}{3}$ og 0.

Vi undersøker om f har topp- eller bunnpunkter ved disse x-verdiene ved å se på den andrederiverte. Vi har
$$f''(x) = 6x - 4,$$
og dermed
$$f''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0 \qquad \text{og} \qquad f''(0) = -4 < 0.$$
Dette betyr at f har bunnpunkt i $(\frac{4}{3}, -\frac{5}{27})$ og toppunkt i $(0, 1)$.

Grafen til f ser slik ut:



Oppgave 2

a)

$$g'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2-4)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$$

b) Siden polynomet $x+1$ har nullpunkt i -1, har g den vertikale asymptoten $x = -1$.

Siden graden til polynomet $x^2 - 4$ er én mer enn graden til polynomet $x+1$, har g skrå asymptote. Ved å utføre polynomdivisjonen

$$(x^2 - 4) : (x+1)$$

finner vi at

$$g(x) = (x-1) - \frac{3}{x+1}.$$

Dette vil si at den skrå asymptoten er linjen

$$l(x) = x - 1.$$

Oppgave 3

a) Vi skal beregne det ubestemte integralet

$$\int x \sin(x^2)\, dx.$$

Vi bruker substitusjonen

$$u = x^2.$$

Da har vi

$$\frac{du}{dx} = 2x,$$

som gir

$$dx = \frac{1}{2x} du.$$

Vi substituerer og regner ut integralet:

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int x(\sin u)\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

b) Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^2 (x^2-2)e^x\,dx.$$

Vi beregner først det tilsvarende ubestemte integralet ved å bruke delvis integrasjon to ganger:

$$\begin{aligned}\int (x^2-2)e^x\,dx &= (x^2-2)e^x - \int 2xe^x\,dx = (x^2-2)e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx \\ &= (x^2-2)e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= (x^2-2x)e^x + C.\end{aligned}$$

Vi kan nå bruke dette til å finne det bestemte integralet:

$$\int_0^2 (x^2-2)e^x\,dx = \big[(x^2-2x)e^x\big]_0^2 = (2^2-2\cdot 2)e^2 - (0^2-2\cdot 0)e^0 = 0.$$

Oppgave 4

a) Vi bruker de gitte verdiene, samt egenskapene til en lineærtransformasjon, til å regne ut:

$$T\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) = T\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big) = T\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big) + T\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$
$$T\Big(\begin{bmatrix}c\\c\end{bmatrix}\Big) = T\Big(c\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) = c\cdot T\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) = c\cdot\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2c\end{bmatrix}$$

b) Det er nok å finne hva hjørnene i enhetskvadratet avbildes på. Vi vet allerede at

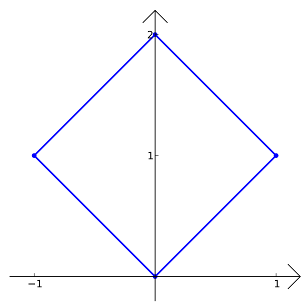
$$T\Big(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad T\Big(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad T\Big(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}.$$

For det fjerde hjørnet har vi

$$T\Big(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Big) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

siden T er en lineærtransformasjon.

Dette betyr at enhetskvadratet avbildes på følgende firkant:



Oppgave 5

a) Vi setter opp utvidet koeffisientmatrise for ligningssettet, og finner redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & -4 & -9 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -9 & -5 & -33 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & -9 & -5 & -33 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{9} & -\frac{43}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{5}{9} & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsningen er altså

$$x = 1, \qquad y = 2, \qquad z = 3.$$

b) Vi setter opp utvidet koeffisientmatrise for ligningssettet, og finner redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ -1 & 2 & -4 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{5} & \frac{53}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Løsningene er altså

$$x = \frac{53}{5} - \frac{16}{5}z, \qquad y = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}z,$$

der z er en fri variabel.

Oppgave 6

a) Med $T(t) = Ce^{kt} + 20$ får vi

$$\frac{dT}{dt} = Cke^{kt} = k(Ce^{kt} + 20 - 20) = k(T - 20),$$

så funksjonen oppfyller den gitte likningen.

b) Vi bruker de gitte verdiene

$$T(0) = 80 \qquad \text{og} \qquad T(1) = 70$$

til å bestemme konstantene C og k i uttrykket for T.
Av $T(0) = 80$ får vi

$$Ce^0 + 20 = 80,$$

som betyr at $C = 60$. Da gir $T(1) = 70$ at

$$60e^k + 20 = 70,$$

som betyr at $k = \ln \frac{5}{6}$.

Vi har altså

$$T(t) = 60e^{(\ln 5/6)t} + 20 = 60\left(\frac{5}{6}\right)^t + 20.$$

Vi kan nå regne ut

$$T(t) = 60 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 20 = \frac{185}{3} \approx 61.7.$$

Kaffen har altså en temperatur på 61.7 grader etter to minutter.

For å finne ut når temperaturen er 50 grader, løser vi likningen $T(t) = 50$. Vi får:

$$\begin{aligned}
60e^{(\ln 5/6)t} + 20 &= 50 \\
e^{(\ln 5/6)t} &= \frac{1}{2} \\
\left(\ln \frac{5}{6}\right)t &= \ln \frac{1}{2} \\
t &= \frac{\ln 1/2}{\ln 5/6} \approx 3.8.
\end{aligned}$$

Det tar altså 3.8 minutter før temperaturen er 50 grader.