Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Steffen Junge (73 59 17 73 / 94 16 27 27)

Eksamen i "Brukerkurs i Matematikk for Informatikere" - (MA0003)

Mandag 7. desember 2009
Tid: 15:00 – 19:00
Hjelpemidler: Ett gult ark stemplet institutt for matematiske fag, spesifisert kalkulator

LØSNING

Oppgavesettet består av oppgavene 1-9. Oppgavene 1-7 skal alle besvares. Av oppgavene 8 og 9 skal bare én besvares. Du velger selv hvilken. Besvares begge regnes oppgave 8 som tellende. Husk å argumentere for alle svar.

Oppgave 1 Hva er tangentligningen for $f(x) = \ln x$ i punktet $(1, 0)$?

Løsning. Siden $f'(x) = \frac{1}{x}$ er stigningstallet til tangenten i $x = 1$ lik 1. Bruker vi etpunktsformelen $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$ får vi:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

som gir oss at tangenten er gitt ved $\underline{\underline{y = x - 1}}$ ■

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y}, \quad y(1) = 1$$

Skriv svaret på implisitt form.

Løsning. Dette er et separabelt problem. Vi beregner:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{3y^2 + 2y} \\
(3y^2 + 2y)\,dy &= 2x\,dx \\
\int 3y^2 + 2y\,dy &= \int 2x\,dx \\
y^3 + y^2 &= x^2 + C
\end{aligned}$$

Innsetter vi initialbetingelsen $y(1) = 1$ i dette får vi:

$$1^3 + 1^2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1.$$

Med andre ord er $\underline{\underline{y^3 + y^2 = x^2 + 1}}$ løsningen av problemet.

∎

Oppgave 3 Finn

$$\int \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt$$

ved en passende substitusjon.

Løsning. Vi setter $u = e^t + 1$. Dette gir $du = e^t\,dt$ og hermed

$$\int \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C = \underline{\underline{\ln(e^t + 1) + C}}$$

∎

Oppgave 4 Finn største og minste verdi av funksjonen $f(x) = (x-1)^3$ på intervallet $[0, 2]$.

Løsning. f har kritiske punkt i endepunktene 0 og 2 samt punkt inn mellom der $f'(x) = 0$. Siden $f'(x) = 3(x-1)^2$ er dette i $x = 1$. Funsjonsverdiene i disse punktene er

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1$$

Siden ekstremalverdier finnes i kritiske punkt er minimum og maksimum h.h.v. ∓ 1. ■

Oppgave 5 La $g(x) = x + e^x$ der $x \in \mathbb{R}$. En kan vise at g har presis ett nullpunkt som må ligge mellom -1 og 0.

a) Finn nullpunktet til g med fire desimalers nøyaktighet ved hjelp av Newtons metode med startverdi $x_0 = -1$.

b) Anta G er en funksjon med $G'(x) = g(x)$. Har G maksimum eller minimum i nullpunktet for g?

Løsning.

a) Vi bruker Newtons metode med $x_0 = -1$ og

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}.$$

Dette gir oss resultatene

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -0.537882843 \\ x_2 &= -0.566986991 \\ x_3 &= -0.567143286 \\ x_4 &= -0.567143290 \end{aligned}$$

Så inntil fire desimaler er $\underline{\underline{x = -0.5671}}$ nullpunktet for g.

b) g har bare ett nullpunkt og siden $g(-1) < 0$, $g(0) > 0$ og $G'(x) = g(x)$ får vi følgende fortegnstabell for G:

		-0.5671	
g	$-$	0	$+$
G	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Som viser at G har $\underline{\underline{\text{minimum}}}$ i $x = -0.5671$. ∎

Oppgave 6 Løs vektor-ligningen:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning. Problemet kan løses ved rekkereduksjon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R3+R1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}R3,\, R1-R3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Som gir oss løsningen $\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1}}$. ∎

Oppgave 7 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen definert ved:

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn (3×2)-matrisen for T.

b) La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$ slik at

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Regn ut $T(\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$.

Løsning.

a) Dersom e_1, e_2 er standard enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$ er matrisen for T gitt ved:

$$\begin{bmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Vi utnytter linearitet av T og beregner:

$$T(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + 2T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

■

Det skal svares på bare én av oppgavene 8 og 9

Oppgave 8 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Finn en (2×2)-matrise X som løser ligningen

$$AX = B.$$

Løsning. Én måte er å beregne A^{-1} og deretter $X = A^{-1}B$. En tilsynelatende annen og litt kortere metode er å innse at $[A|B] \sim [I|X]$. Disse metodene er essensielt fullstendig like.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R2+R1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{R1-2R2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Som gir oss svaret $\underline{\underline{X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}$.

NB: Alternativt kan en la inngangene i X, d.v.s. $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}$ være ukjente. Regner en ut matrisepruduktet AX og setter hver inngang lik den tilsvarende i B får en fire lineære ligninger i de ovennevnte variable. Dette 4×4 problem kan løses på vanlig måte. Denne metoden er kanskje lettest å forstå men er vesentlig mer arbeidskrevende. ■

Oppgave 9 Ta ett skritt av lengde $h = 2$ med modifisert Euler på initialverdiproblemet

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

Løsning. Først et halvt skritt med vanlig Euler:

$$k = y_0 + \frac{h}{2}(x_0 + y_0) = 0 + 1(0 + 0) = 0$$

Med dette blir det fulle skrittet med modifisert Euler:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + \frac{h}{2} + k) = 0 + 2(0 + 1 + 0) = 2$$

Resultat av skrittet er m.a.o. $\underline{\underline{(x_1, y_1) = (2, 2)}}$.

■