Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Hilde Sande 41 62 53 22

Eksamen i MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere

Tirsdag 14. desember 2010
Tid: 09:00–13:00
Sensur: 14. januar 2011

Hjelpemidler:
Kode C: Ett håndskrevet gult A4-ark stemplet Institutt for matematiske fag, Rottmann; Matematisk formelsamling, og enkel, bestemt kalkulator.

Alle deloppgaver teller like mye

Alle svar skal begrunnes!

Oppgave 1 La funksjonen $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}x$ være definert for $x \in [0,3]$.

a) Finn de globale minimums- og maksimumspunktene til $f(x)$.

b) Vis at $f(x)$ har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $(1,3)$.

c) Bruk Newtons metode til å finne et estimat for nullpunktet med to riktige desimaltall.

Oppgave 2 Finn den generelle løsningen på implisitt form for differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{1+y},$$

der $y > 0$.

Oppgave 3 Vi skal for $t \geq 1$ se på initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{y}{t}, \quad \text{for } y(1) = 1.$$

a) Bruk Eulers metode med skrittlengde $h = 0.1$ til å finne en tilnærmet verdi for $y(1.5)$.

b) Vis at den generelle løsningen av differensialligningen er

$$y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{C}{t}.$$

Bestem C slik at $y(t)$ er eksakt løsning av initialverdiproblemet vårt.
Finn den eksakte verdien for $y(1.5)$ og sammenlign med tilnærmingen du fant i a).

Oppgave 4 Beregn integralet

$$\int 2x^3 \cos(x^2 + 2)\mathrm{d}x.$$

Oppgave 5 Skriv ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3z &= 6, \\ x + y + z &= 6, \\ 4x + y + 11z &= 25, \end{aligned}$$

på utvidet matriseform og løs systemet ved hjelp av Gauss-eliminasjon/rad-reduksjon.

Oppgave 6 Vi har to lineære transformasjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$:

$$T_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a) Tegn bildet av enhetskvadratet under transformasjonen T_1 og bildet av enhetskvadratet under transformasjonen T_2

b) Sammensetningen av T_2 og T_1 gir oss en ny lineær transformasjon:

$$T_3(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

Finn matrisen for denne transformasjonen, det vil si, finn A_3 slik at $T_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x}$.
Hva blir bildet av enhetskvadratet under transformasjonen T_3?